



**Arlindo
Tavares Semedo**

**Roteamento de Veículos sem e com Janelas
Temporais**



**Arlindo
Tavares Semedo**

Roteamento de Veículos sem e com Janelas Temporais

"Para entender um problema, temos que tentar ao menos algumas das soluções mais óbvias e descobrir que elas falham; então redescobrimos que existe uma dificuldade - um problema"

— Karl Raimund Popper —



**Arlindo
Tavares Semedo**

Roteamento de Veículos sem e com Janelas Temporais

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica da Doutora Maria Cristina Saraiva Requejo Agra, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president

Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

vogais / examiners committee

**Professora Doutora Maria Margarida de Andrade Corte Real
Gonçalves**

Professora Auxiliar da Universidade Católica Portuguesa -Porto

Professora Doutora Maria Cristina Saraiva Requejo Agra,

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientadora)

agradecimentos / acknowledgements

É com muito gosto que aproveito esta oportunidade para agradecer a todos os que me ajudaram, direta ou indiretamente, a cumprir os meus objetivos e a realizar mais uma etapa da minha formação académica.

- À Professora Cristina Requejo, orientadora desta Dissertação, pela sua disponibilidade, pelo apoio intensivo e pelo seu espírito crítico, que contribuíram significativamente para a qualidade deste trabalho.
- À coordenadora do curso, Doutora Isabel Pereira, pela calorosa recepção, encaminhamento e orientação.
- A todos os meus professores que, com o seu conhecimento e capacidade de orientação, contribuíram para a qualidade da minha formação.
- Aos meus colegas, Ilídio Moreira, Agostinho Monteiro e Dulcelina Moreira, pelo valioso contributo prestado.
- A todos os meus familiares pelo apoio moral e pelo incentivo recebido ao longo da minha formação, com especial destaque aos meus pais, meus avós e meus irmãos.
- Aos meus dois filhos, Aílton e Anilton César, em Cabo Verde, que foram capazes de superar inúmeras dificuldades enfrentadas durante a minha ausência.
- À minha esposa, Maria Olinda, e à minha filha, Celisa de Fátima, pelo especial acompanhamento e apoio incondicional durante este percurso.
- À inspiração divina que sem a qual não seriam possíveis as minhas realizações.

**dedicatória /
dedication**

É com muito orgulho que dedico este trabalho aos meus queridos filhos, com desejo de que sejam jovens brilhantes e alunos fascinantes.

"Bons filhos conhecem o prefácio da história dos seus pais. Filhos brilhantes vão muito mais longe, conhecem os capítulos mais importantes das suas vidas.

Bons jovens preparam-se para o sucesso. Jovens brilhantes preparam-se para as derrotas. Eles sabem que a vida é um contrato de risco e que não há caminhos sem acidentes.

Bons jovens têm sonhos ou disciplina. Jovens brilhantes têm sonhos e disciplina. Pois sonhos sem disciplina produzem pessoas frustradas, que nunca transformam seus sonhos em realidade, e disciplina sem sonhos produz servos, pessoas que executam ordens, que fazem tudo automaticamente e sem pensar.

Bons alunos escondem certas intenções, mas alunos fascinantes são transparentes. Eles sabem que quem não é fiel à sua consciência tem uma dívida impagável consigo mesmo. Não querem, como alguns políticos, o sucesso a qualquer preço. Só querem o sucesso conquistado com suor, inteligência e transparência. Pois sabem que é melhor a verdade que dói do que a mentira que produz falso alívio. A grandeza de um ser humano não está no quanto ele sabe mas no quanto ele tem consciência que não sabe.

O destino não é frequentemente inevitável, mas uma questão de escolha. Quem faz escolha, escreve sua própria história, constrói seus próprios caminhos.

Os sonhos não determinam o lugar onde vocês vão chegar, mas produzem a força necessária para tirá-los do lugar em que vocês estão. Sonhem com as estrelas para que vocês possam pisar pelo menos na Lua. Sonhem com a Lua para que vocês possam pisar pelo menos nos altos montes. Sonhem com os altos montes para que vocês possam ter dignidade quando atravessarem os vales das perdas e das frustrações. Procurem um grande amor na vida e cultivem-no. Pois, sem amor, a vida se torna um rio sem nascente, um mar sem ondas, uma história sem aventura! Mas, nunca esqueçam, em primeiro lugar tenham um caso de amor consigo mesmos."

palavras-chave

roteamento de veículos, janelas temporais, programação linear inteira mista.

resumo

Neste trabalho abordamos o Problema de Roteamento de Veículos (PRV) e o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas Temporais (PRVJT). O PRV, bem como a sua extensão PRVJT, são problemas combinatórios pertencentes à classe de problemas NP-Difíceis. Para ambos os problemas, apresentamos dois grupos de formulações em Programação Linear Inteira Mista: um grupo de formulações em que cada rota é associada a um veículo específico e outro grupo de formulações em que são determinadas as rotas sem as associar aos veículos. Usamos as formulações apresentadas para obter resultados computacionais para vários exemplos. Os exemplos que usamos têm 4, 7, 13, 20, 25, 40, 50, 75 e 100 clientes, 1 depósito e até 27 veículos. Os resultados computacionais permitem-nos comparar, para estes exemplos, os valores da relaxação linear e os valores da melhor solução admissível encontrada. Esses resultados computacionais foram obtidos com as formulações usando o software *Xpress*.

keywords

vehicle routing, time windows, mixed integer linear programming.

Abstract

We consider the Vehicle Routing Problem (VRP) and the Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW). The VRP and its extension VRPTW are combinatorial problems belonging to the class of NP-Hard problems. For both problems we present two groups of mixed integer linear programming formulations, a group of formulations where each route is associated with a particular vehicle and another group of formulations where the route is determined without being associated with the vehicles. We use the formulations presented to obtain computational results for several examples. The examples have 4, 7, 13, 20, 25, 40, 50, 75 and 100 clients, 1 depot and at maximum 27 vehicles. The computational results allow us to compare the linear relaxation values and the values of the best feasible solution obtained. The computational results were obtained using the formulations with the software *Xpress*.

Conteúdo

Conteúdo	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
1 Introdução	1
2 Problema de Roteamento de Veículos	4
2.1 Formulações do PRV	5
2.1.1 Formulações do PRV, usando MTZ e variáveis x_{ijk}	8
2.1.2 Formulação do PRV, usando Fluxos e variáveis x_{ijk}	15
2.1.3 Formulações do PRV, usando MTZ e variáveis x_{ij}	17
2.1.4 Formulação do PRV, usando Fluxos e variáveis x_{ij}	19
2.2 Exemplos do PRV	21
2.3 Resultados computacionais	26
2.3.1 Instâncias construídas	26
2.3.2 Instâncias de referência	33
3 Problema de Roteamento de Veículos com Janelas Temporais	36
3.1 Formulação do PRVJT	37
3.1.1 Formulação do PRVJT, usando variáveis x_{ijk}	37
3.1.2 Formulação do PRVJT, usando variáveis x_{ij}	42
3.2 Exemplos de PRVJT	46
3.3 Resultados Computacionais	56
4 Conclusão	69
A Modelo Xpress	71
A.1 Código Mosel em Xpress para PRV, usando a formulação MTZ1	71

A.2	Código Mosel em Xpress para PRVJT, usando a formulação PRVJT4 .	75
B	Outros resultados computacionais	80
	Bibliografia	88

Lista de Figuras

2.1	Solução ótima com custo total 6941.	10
2.2	Ilustração de $MTZ1-MS_{-}(2.12)_{-}(2.13)$	14
2.3	Solução ótima da Instância 1.	22
2.4	Solução ótima da Instância 2.	23
2.5	Solução ótima da Instância 3.	24
2.6	Solução ótima da Instância 4.	25
3.1	Ilustração das restrições (3.8) e (3.10).	41
3.2	Ilustração das restrições (3.17) e (3.21).	45
3.3	Solução ótima, com custo 5784u.m., obtida com a formulação PRVJT2	48
3.4	Solução ótima, com custo 5784, obtida com a formulação PRVJT4	49
3.5	Linha temporal, usando formulação PRVJT4	50

Lista de Tabelas

2.1	Matriz de custos dos percursos entre as cidades.	10
2.2	Custos de viagem e procuras, na Instância 1.	22
2.3	Custos de viagem e procuras, da Instância 2.	23
2.4	Custo de viagem entre as cidades e os respetivos pedidos.	28
2.5	Resultados do Exemplo 1.	29
2.6	Resultados do Exemplo 2.	30
2.7	Resultados do Exemplo 3.	31
2.8	Resultados computacionais das instâncias de referência.	34
3.1	Dados do Exemplo 1.	47
3.2	Tempo de viagem entre as localidades.	47
3.3	Janelas temporais do Grupo R.	58
3.4	Janelas temporais do Grupo C.	58
3.5	Janelas temporais do Grupo RC.	59
3.6	Resultados computacionais das instâncias do grupo R.	61
3.7	Resultados computacionais das instâncias do grupo C.	63
3.8	Resultados computacionais das instâncias do grupo RC.	65
3.9	Resultados computacionais de instâncias com 50 clientes, variando Q. .	67
3.10	Resultados computacionais de instâncias com 100 clientes, variando Q.	68
B.1	Resultados computacionais das instâncias de Solomon ("grupo R"), sem que o veículo permaneça no local do cliente durante o tempo de serviço.	82
B.2	Resultados computacionais das instâncias de Solomon ("grupo C"), sem que o veículo permaneça no local do cliente durante o tempo de serviço.	83
B.3	Resultados computacionais das instâncias de Solomon ("grupo RC"), sem que o veículo permaneça no local do cliente durante o tempo de serviço.	84
B.4	Resultados computacionais do grupo R, sem tempo de serviço.	85

B.5	Resultados computacionais do grupo C, sem tempo de serviço.	86
B.6	Resultados computacionais do grupo RC, sem tempo de serviço.	87

Capítulo 1

Introdução

O Problema de Roteamento de Veículos (PRV), em inglês *Vehicle Routing Problem (VRP)*, introduzido por *Dantzig e Ramser (1959)* [6], é um dos problemas mais complexos da otimização combinatória e dos mais estudados na literatura de investigação operacional. O PRV consiste basicamente em construir e organizar, com custo total mínimo, um conjunto de rotas para uma frota de veículos, de modo a servir um conjunto de clientes, cada um com a sua procura. Tudo deve acontecer de tal modo que cada cliente seja servido exatamente uma vez, cada rota começa e termina no depósito e nenhum veículo pode efetuar uma rota em que a procura total dos clientes ultrapassa a sua capacidade.

O PRV pertence à classe de problemas NP-Difíceis, já que generaliza o Problema do Caixeiro Viajante, que por sua vez também pertence à classe NP-Difícil [5]. A sua resolução por abordagens puramente exatas é, em muitos casos, computacionalmente impraticável. Considerando um conjunto de localizações, representando cidades, e um conjunto de distâncias entre eles, o Problema do Caixeiro Viajante (PCV), em inglês *Travelling Salesman Problem (TSP)*, consiste na determinação de uma rota que inicia numa das cidades, passa por cada cidade do conjunto apenas uma vez, e retorna à cidade inicial da rota de modo que a distância total percorrida seja mínima. Esta rota é denominada de ciclo Hamiltoniano de custo mínimo [7]. Num PCV considera-se a existência de um só veículo, com capacidade ilimitada, que deve visitar todos os clientes numa só rota a um custo mínimo. Não há procura associada ao cliente e a distância total percorrida não depende da cidade tomada como depósito.

O PRV é um problema para o qual o número de publicações é muito elevado. O interesse neste problema deve-se a duas razões fundamentais [13]. Uma razão é a de que se trata de um problema bastante complexo e como tal suscita muito interesse na procura

de métodos, tanto exatos como heurísticos, capazes da sua resolução. A outra razão é a de que se trata de um problema com muitas aplicações em transportes, distribuição e logística. Tais aplicações implicam uma série de situações reais que afetam principalmente a indústria, o comércio, o setor de serviços, a segurança, a saúde pública, a educação e o lazer [9].

De acordo com *Goldbarg e Luna (2005)*[9] (pag. 375 e 376) uma forma de classificar o PRV, proposta por *Bodin e Golden(1981)*[2], consiste na especificação dos seguintes critérios:

1. Tempo para servir um determinado cliente: que pode ser tempo não especificado, tempo especificado (ou prefixado) ou janela de tempo (*time windows*).
2. Número de depósitos: podemos considerar um depósito ou mais de um depósito.
3. Tamanho da frota: frota com um só veículo ou frota com mais do que um veículo.
4. Tipo de frota disponível: frota homogênea (todos os veículos têm a mesma capacidade) ou frota heterogênea (veículos com capacidades diferentes).
5. Natureza da procura (ou de outros parâmetros): determinística ou estocástica.
6. Localização das procuras: nos vértices ou nos arcos.
7. Tipo de grafo: grafo direcionado, não direcionado ou misto.
8. Tempo total de serviço para cada veículo: o mesmo para todos os veículos; tempos diversos ou sem restrições de tempo.
9. Custos: variáveis (associados à rota escolhida) ou fixos.
10. Tipo de operação a efetuar pelos veículos: entrega, recolha ou ambas.
11. Objetivo: minimizar custos fixos, minimizar custos de operação das rotas ou minimizar número de veículos.
12. Restrições na capacidade dos arcos: restrições impostas a todos os arcos, restrições impostas a um subconjunto de arcos ou sem restrições.
13. Outros.

Ainda segundo *Goldbarg e Luna (2005)*[9] uma outra forma de classificar o PRV é proposta por *Magnanti (1981)*[11]. Nesta classificação os problemas são separados em problemas de roteamento em grafos e em problemas de roteamento mais aplicados e considerados mais práticos. A classe geral dos problemas de roteamento em grafos seria constituída pelas seguintes subclasses:

1. problemas de roteamento em nós (associados aos ciclos Hamiltonianos);
2. problemas de roteamento em arcos (associados aos ciclos Eulerianos).

No presente trabalho consideramos dois casos: O problema de Roteamento de Veículos, sem restrições de tempo, e uma das suas extensões, o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas Temporais, em que a cada cliente é associado uma janela temporal e um tempo de serviço.

O Problema de Roteamento de Veículos com Janelas Temporais (PRVJT), em inglês *Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW)*, é uma extensão do PRV na qual são consideradas restrições adicionais referentes às janelas temporais. Estas restrições obrigam a que cada cliente seja atendido dentro de um intervalo temporal predeterminado [16]. Sendo uma extensão do PRV, o PRVJT pertence também à classe de problemas NP-difíceis.

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: o primeiro capítulo corresponde à fase introdutória. No segundo e no terceiro capítulo consideramos o PRV e o PRVJT, respetivamente. Para ambos os problemas apresentamos algumas formulações em programação linear inteira mista, procuramos obter soluções ótimas para alguns exemplos e, para várias instâncias, indicamos os resultados computacionais referentes à relaxação linear e à melhor solução admissível obtida. Para resolver tais exemplos e obter os referidos resultados computacionais usamos o software *Xpress*, versão 7.3. O quarto capítulo corresponde à conclusão do trabalho. No Apêndice A, apresentamos os códigos "Mosel" de duas formulações, usados para determinar os resultados computacionais. No Apêndice B, estão os resultados computacionais de algumas instâncias do PRVJT, determinados para testar formulações derivadas das formulações apresentadas no terceiro capítulo, tendo em conta a flexibilidade no tempo de serviço.

Capítulo 2

Problema de Roteamento de Veículos

O problema de roteamento de veículos (PRV) consiste em construir e organizar, com custo total mínimo, um conjunto de rotas para uma frota de veículos com capacidades usualmente limitadas, de modo a servir um conjunto de clientes geograficamente dispersos, cada um com a sua procura de valor positivo. As rotas definidas devem, também, respeitar as seguintes restrições: cada cliente é servido apenas uma vez, cada rota começa e termina no depósito e a procura total dos clientes servidos por uma rota não deve ultrapassar a capacidade do veículo que efetua a rota.

O PRV considerado neste capítulo está sujeito aos seguintes critérios, tendo em conta uma das formas de classificação proposta por *Bodin e Golden(1981)*, apresentada no primeiro capítulo:

- um depósito;
- vários veículos com capacidades limitadas;
- parâmetros de natureza determinística;
- grafo orientado;
- localização dos clientes nos vértices;
- entrega de mercadorias;
- tempo de serviço não especificado;
- objetivo de minimizar custo total.

Este capítulo encontra-se dividido em três secções. Na primeira secção propomos formulações em programação linear inteira mista para o PRV. Na segunda secção apresentamos os resultados obtidos para alguns exemplos, incluindo algumas instâncias de referência, em que apresentamos o valor ótimo e a composição das rotas. Na terceira secção apresentamos os resultados computacionais obtidos para algumas instâncias: umas que construímos e outras de uma base de referência. Também usamos os resultados computacionais para comparar as formulações apresentadas.

2.1 Formulações do PRV

Nesta secção apresentamos dois grupos de formulações: um grupo em que na solução reconhecemos de imediato o veículo associado a cada rota, usando as variáveis binárias x_{ijk} , e outro grupo de formulações em que as rotas não ficam diretamente associadas aos veículos, usando as variáveis binárias x_{ij} . Estas variáveis estão definidas a frente, quando apresentamos as formulações.

Para definir este problema, consideramos o grafo orientado $G = (V, A)$ em que $V = \{0, 1, \dots, n\}$ é um conjunto de vértices, onde os elementos de $N = V \setminus \{0\}$ correspondem aos clientes e o vértice 0 representa o depósito, e $A = \{(i, j), i, j \in V, i \neq j\}$ é o conjunto de arcos. Consideramos ainda um conjunto $K = \{1, 2, \dots, m\}$ de veículos com a mesma capacidade Q e os seguintes parâmetros: c_{ij} que corresponde ao custo associado ao arco $(i, j) \in A$ e $q_i > 0$ que representa a procura do cliente $i \in N$.

Para apresentarmos uma primeira formulação para este problema consideramos as variáveis binárias x_{ijk} , com $(i, j) \in A$ e $k \in K$, que assumem valor 1 quando o veículo k visita o cliente j imediatamente após ter servido o cliente i e assume o valor 0 em caso contrário. Trata-se de uma formulação natural uma vez que apenas usa variáveis que definem a estrutura da solução.

Uma formulação em programação linear inteira, que designamos por **FPRV** é composta pelas expressões que se seguem e que também podem ser encontradas em [7, 10]:

$$\text{minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk} \quad (2.1)$$

sujeito a :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in N, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} \leq 1, \quad \forall k \in K, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ijk} = \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{jik}, \quad \forall j \in V, \forall k \in K, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i \in N} \left(q_i \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ijk} \right) \leq Q, \quad \forall k \in K, \quad (2.5)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subseteq N, \forall k \in K, \quad (2.6)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K. \quad (2.7)$$

A função objetivo (2.1) expressa o custo total a ser minimizado. As restrições (2.2) asseguram que cada cliente é servido apenas uma vez. As restrições (2.3) obrigam a que cada veículo efetue, no máximo, uma rota. As restrições (2.4) são restrições de conservação de fluxo. As restrições (2.5) correspondem às restrições de capacidade e impedem que um veículo visite clientes cuja soma das procuras é superior à sua capacidade. As restrições (2.6) evitam a formação de sub-rotas (as que não incluem o depósito), isto é, asseguram que num conjunto de $|S|$ clientes não há mais do que $|S| - 1$ arcos para os ligarem. As restrições (2.7) referem-se aos valores das variáveis e, neste caso, indicam que as variáveis x_{ijk} são binárias. Notamos que para obter uma formulação para um PRV com veículos não capacitados excluimos as restrições (2.5). Obtemos a relaxação linear do problema substituindo as restrições (2.7) pelas restrições

$$x_{ijk} \in [0, 1], \forall (i, j) \in A, \forall k \in K. \quad (2.8)$$

Consideramos o número de clientes $n = |N|$ e o número de veículos $m = |K|$. Para termos uma ideia da dimensão desta formulação podemos determinar, em função de m e n , o número de variáveis e de restrições. O número de variáveis x_{ijk} , com $(i, j) \in A$ e $k \in K$, fica definido pela expressão $(n+1) \times n \times m = mn(n+1)$. Para calcular o número de restrições recorreremos às expressões que as representam na formulação e somamos os respetivos números. Sendo assim, podemos identificar n restrições no conjunto (2.2), m restrições identificadas em (2.3), $m \times (n+1)$ em (2.4), m em (2.5), $\underbrace{m \times 2^n}_{\text{exponencial}}$ em (2.6) e $m \times n \times (n+1)$ em (2.7), perfazendo um total de $n + m + m(n+1) + m + m \times 2^n + mn(n+1) = m2^n + mn^2 + (2m+1)n + 3m$. Temos portanto um número de restrições de ordem exponencial, $\mathcal{O}(m2^n)$.

Para termos uma ideia mais clara da variação do número de variáveis e de restrições

desta formulação consideramos um exemplo. Construimos para esse exemplo, uma tabela onde registamos o número de variáveis e de restrições, em função do número de clientes, e consideramos a existência de três veículos disponíveis.

Variação de número de variáveis e de restrições de FPRV.

Número de clientes	4	7	10	11	12	13	25
Número de variáveis	60	168	330	396	468	546	1950
Número de restrições	133	589	3451	6593	12813	25183	100665355

Como podemos observar, considerando 25 clientes e 3 veículos, o número de restrições é já enorme. A complexidade desta formulação deve-se fundamentalmente à presença das restrições de eliminação de sub-rotas, identificadas por (2.6). Nesta formulação, tais restrições têm cardinalidade que cresce exponencialmente com o número n de clientes. Isto significa que é praticamente impossível resolver a relaxação linear do problema quando n for muito grande. Uma possível forma de superar esta desvantagem é a de considerar um subconjunto limitado destas restrições e adicionar as restantes, apenas se necessário, por meio de procedimentos de separação de restrições apropriados. As restrições consideradas podem ser relaxadas na forma Lagrangeana ou incluídas explicitamente na relaxação linear do problema.

Alternativamente a este processo, podemos substituir as restrições (2.6) por uma família de restrições com cardinalidade polinomial. Nesta fase vamos apresentar duas famílias de restrições. Uma das famílias que foi proposta por *Miller, Tucker e Zemlin (MTZ)* [12], para o PCV, e outra família de restrições que consiste no uso de fluxos. Para a definição de cada uma destas famílias usamos variáveis adicionais que ajudam na construção das restrições. Por usarem conjuntos adicionais de variáveis as formulações que serão apresentadas são formulações estendidas.

De seguida vamos usar cada uma das duas famílias de restrições em dois grupos de formulações. Um grupo de formulações onde usamos as principais variáveis de decisão $x_{ijk} \in \{0, 1\}$, que assumem o valor 1 se o arco $(i, j) \in A$ for usado pelo veículo $k \in K$ para obter a solução e assumem o valor 0 em caso contrário e outro grupo em que as principais variáveis de decisão são as variáveis binárias x_{ij} , que assumem o valor 1 se o arco $(i, j) \in A$ faz parte da solução e assumem o valor 0 em caso contrário. Podemos verificar que o uso das variáveis binárias x_{ijk} permite-nos identificar, de imediato, a rota atribuída a cada veículo k , enquanto que com as variáveis x_{ij} as rotas não ficam, de imediato, associadas aos veículos.

Em primeiro lugar apresentamos o grupo de formulações em que usamos as variáveis

binárias x_{ijk} .

2.1.1 Formulações do PRV, usando MTZ e variáveis x_{ijk}

Nesta secção vamos considerar a família de restrições propostas por *Miller, Tucker e Zemlin*, numa versão generalizada [16]. Continuamos a usar as variáveis binárias x_{ijk} e adicionalmente as variáveis contínuas u_{ik} , com $i \in N$ e $k \in K$, que representam a carga do veículo k após ter servido o cliente i . As conhecidas restrições de MTZ podem ser descritas pelas expressões que se seguem.

$$u_{jk} \geq u_{ik} + q_j - Q(1 - x_{ijk}), \quad \forall i, j \in N, i \neq j, \forall k \in K, \quad (2.9)$$

$$q_i \leq u_{ik} \leq Q, \quad \forall i \in N, \forall k \in K, \quad (2.10)$$

Uma formulação em Programação Linear Inteira mista (*PLIM*), que designamos por **MTZ1**, tem a seguinte forma:

$$\text{minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk} \quad (2.1)$$

sujeito a :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in N, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} \leq 1, \quad \forall k \in K, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ijk} = \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{jik}, \quad \forall j \in V, \forall k \in K, \quad (2.4)$$

$$u_{jk} \geq u_{ik} + q_j - Q(1 - x_{ijk}), \quad \forall i, j \in N, i \neq j, \forall k \in K, \quad (2.9)$$

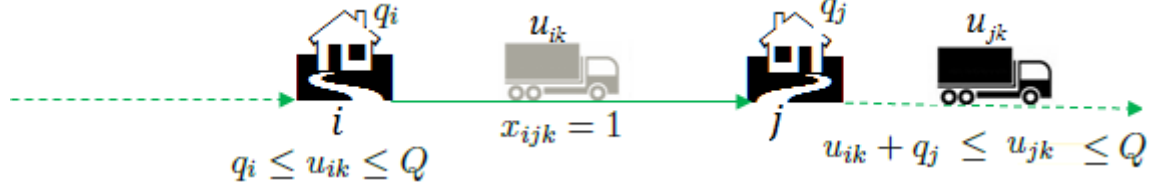
$$q_i \leq u_{ik} \leq Q, \quad \forall i \in N, \forall k \in K, \quad (2.10)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K. \quad (2.7)$$

Tal como anteriormente, podemos obter a relaxação linear do problema, substituindo as restrições (2.7) pelas restrições (2.8)

Nesta formulação, apenas as restrições (2.9) e (2.10) diferem da formulação anterior. O conjunto das restrições (2.9) e (2.10), que substituem (2.5) e (2.6), dizem respeito à capacidade dos veículos e à eliminação de sub-rotas. As restrições (2.9) garantem que quando um veículo k sai do cliente i para servir o cliente j , então a sua carga após ter servido o cliente j , é superior ou igual à soma do pedido do cliente j com a sua carga após ter servido o cliente i , isto é, $x_{ijk} = 1 \Rightarrow u_{jk} \geq u_{ik} + q_j$. As restrições (2.10) referem-se aos valores das variáveis contínuas u_{ik} , para todo $i \in N$ e todo $k \in K$,

e impõem que a carga de um veículo k , após ter servido o cliente i é não inferior à procura do cliente i e não superior à capacidade do veículo. Tais restrições podem ser ilustrados, com uma figura, de seguinte modo:



Nesta figura podemos observar que se o cliente i for visitado pelo veículo k , então a quantidade da carga do veículo após ter visitado o cliente situa-se entre a quantidade do pedido do cliente e a capacidade do veículo, $q_i \leq u_{ik} \leq Q$; se o veículo k viajar de i para j , $x_{ijk} = 1$, então o valor da sua carga após ter servido o cliente j situa-se entre o valor da sua capacidade e o valor da soma da sua carga após ter servido o cliente i com o pedido do cliente j ($u_{ik} + q_j \leq u_{jk} \leq Q$). Se um veículo k viajar do cliente i para o cliente j , $x_{ijk} = 1$, então, segundo as restrições (2.9) temos $u_{jk} \geq u_{ik} + q_j$. Se o mesmo veículo k viajar do cliente j para o cliente i , $x_{jik} = 1$, então $u_{ik} \geq u_{jk} + q_i$, de acordo com as mesmas restrições. Assim, se $x_{ijk} = x_{jik} = 1$ temos $(u_{jk} \geq u_{ik} + q_j \wedge u_{ik} \geq u_{jk} + q_i) \Rightarrow q_i + q_j \leq 0$, que é uma contradição, porque os pedidos dos clientes têm valores positivos. Assim sendo, para 2 clientes deve ser utilizado no máximo um arco para os ligar, evitando formação de subcircuitos. O mesmo acontece com qualquer número de clientes, isto é para ligar $n^* \in N^* \subseteq N$ clientes deve ser utilizado no máximo, $(n^* - 1)$ arcos para os ligarem. Caso contrário entraríamos em contradição, $\sum_{i \in N^*} q_i \leq 0$ e $q_i > 0$.

Vamos ainda apresentar a solução de uma instância, por meio de uma figura, com o intuito de ilustrar as restrições (2.9) e (2.10). Consideramos um exemplo com um depósito em Amesterdão (0) e quatro clientes, localizados em Atenas (1), Berlim (2), Berna (3) e Bruxelas (4). Consideramos ainda que no depósito há três veículos disponíveis, cada um com capacidade $Q = 500$ toneladas. A cada cidade fazemos corresponder um número que indicamos entre parênteses.

Os custos entre as localidades estão indicados numa matriz representada pela Tabela 2.1.

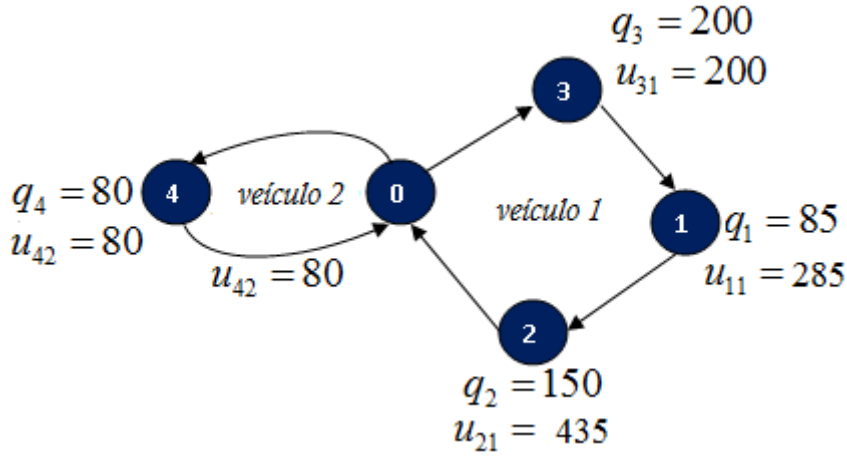
Vamos considerar que os pedidos dos clientes (em toneladas) são os seguintes:

Cliente, i	Atenas	Berlim	Berna	Bruxelas
Pedido, q_i	85	150	200	80

Tabela 2.1: Matriz de custos dos percursos entre as cidades.

	Amesterdão	Atenas	Berlim	Berna	Bruxelas
Amesterdão	0	3122	686	852	210
Atenas	3122	0	2646	2337	3063
Berlim	686	2646	0	974	817
Berna	852	2337	974	0	672
Bruxelas	210	3063	817	672	0

Figura 2.1: Solução ótima com custo total 6941.



A Figura 2.1 ilustra a solução ótima do problema. Podemos observar que o veículo 1 sai, com 435 toneladas, de Amesterdão para Berna, segue para Atenas, depois para Berlim e por fim regressa a Amesterdão. O veículo 2 sai de Amesterdão com 80 toneladas, atende o cliente em Bruxelas e regressa a Amesterdão.

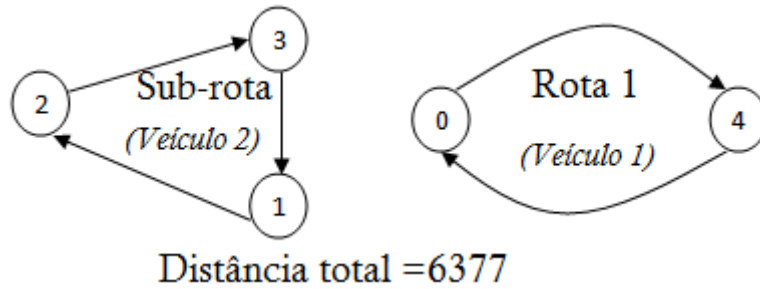
Observando a figura 2.1, podemos verificar que:

- O veículo 1 sai do depósito 0 para servir o cliente 3, $x_{031} = 1$. Portanto, de acordo com as restrições (2.10), $q_3 \leq u_{31} \leq Q$ ($200 \leq 200 \leq 500$);
- O veículo 1 segue do cliente 3 para o cliente 1, $x_{311} = 1$. Portanto $u_{11} \geq u_{31} + q_1$ ($285 \geq 200 + 85$), por (2.9), e $q_1 \leq u_{11} \leq Q$ ($85 \leq 285 \leq 500$), por (2.10);
- O veículo 1 sai do cliente 1 para servir o cliente 2, $x_{121} = 1$. Portanto $u_{21} \geq u_{11} + q_2$ e $q_2 \leq u_{21} \leq Q$, por (2.9) e (2.10);
- O mesmo veículo 1, tendo servido os três clientes, não pode servir o cliente 4, porque viola as restrições de capacidade. Ou seja, se $x_{240} = 1$, então, segundo

(2.9), $u_{41} \geq u_{21} + q_4$, mas isto não pode acontecer porque viola (2.10) ($515 \leq 500?$).

- Se $x_{ijk} = 0$, então $u_{jk} \geq u_{ik} + q_j - Q$ é satisfeita $\forall i, j = 1 \dots 4$ e $\forall k = 1 \dots 3$

Caso não houvesse necessidade de eliminar as sub-rotas que não incluem o depósito, não considerávamos as restrições (2.9). Sendo assim, a figura que se segue representava uma solução admissível, com custo total menor que o da solução ótima onde as restrições (2.9) são consideradas.



Vejamos como funcionam as restrições (2.9) para eliminar a sub-rota efetuada pelo veículo 2.

- O veículo 2 viaja do cliente 2 para o cliente 3, $x_{232} = 1$. Neste caso as restrições (2.9), correspondentes a $u_{32} \geq u_{22} + q_3$, não são violadas;
- O veículo 2 viaja do cliente 3 para o cliente 1, $x_{312} = 1$. Portanto, $u_{12} \geq u_{32} + q_1$ que implica $u_{12} \geq u_{22} + q_3 + q_1$ (restrições (2.9)).
- Assim sendo, as restrições (2.9) impedem que o veículo 2 se desloque do cliente 1 para o cliente 2, isto é $x_{122} = 0$. Caso contrário, se $x_{122} = 1$, de acordo com (2.9), teríamos $u_{22} \geq u_{12} + q_2$. Desta forma $u_{22} \geq u_{22} + q_3 + q_1 + q_2 \Leftrightarrow 0 \geq q_1 + q_2 + q_3$. Isto não pode acontecer, porque as procuras q_i dos clientes são todas positivas. Portanto, o veículo 2, depois de ter viajado do cliente 2 para o cliente 3 e do cliente 3 para o cliente 1 só pode viajar do cliente 1 para o cliente 2 na ausência das restrições (2.9).

À semelhança do que fizemos com a formulação anterior, vamos também agora determinar o número de variáveis e de restrições da formulação **MTZ1**, em função de n e m . O número de variáveis x_{ijk} é igual a $mn(n+1)$ e o número das variáveis u_{ik} é igual a mn . Portanto, o número de variáveis desta formulação fica definido pela expressão algébrica

$mn(n+1) + mn = mn(n+2)$, $\mathcal{O}(mn^2)$. O número de restrições fica definido pela expressão $n + m + m(n+1) + m(n^2 - n) + 2mn + mn(n+1) = \underbrace{2mn^2 + (3m+1)n + 2m}_{\text{polinomial}}$,

$\mathcal{O}(mn^2)$. Podemos observar que a cardinalidade das restrições passou agora a ser de ordem polinomial.

Na tabela que se segue registamos a variação do número de variáveis e do número de restrições, em função de número n de clientes, considerando uma frota com três veículos disponíveis.

Números de variáveis e de restrições, com 3 veículos disponíveis.

Número de clientes	4	7	10	11	12	13	25
Número de variáveis	72	189	360	429	504	585	2025
Número de restrições	142	370	706	842	990	1150	4006

Ao substituírmos as restrições de eliminação de subcircuitos (2.6) e as de capacidade (2.5) pelas restrições *MTZ* expressas por (2.9) e (2.10), observamos uma redução bastante significativa no número de restrições. Vejamos que com 3 veículos disponíveis e 25 clientes o número de restrições reduziu de 100665355 para 4006. Portanto, há uma melhoria significativa em termos de custo computacional.

É importante notar que as restrições de eliminação de sub-rotas, (2.9) e (2.10), podem ser melhoradas usando, alternativamente, o seguinte conjunto de restrições [14]:

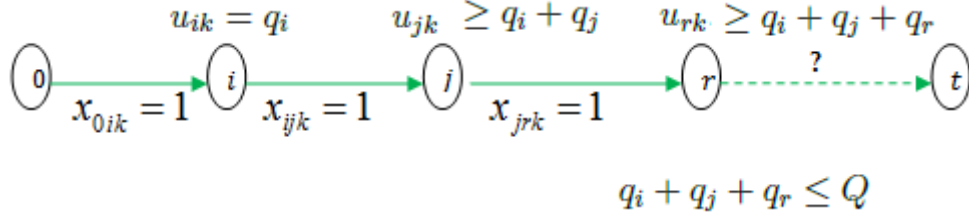
$$u_{jk} \geq u_{ik} + q_j - Q + Q(x_{jik} + x_{ijk}) - (q_i + q_j)x_{jik}, \quad \forall i, j \in N, i \neq j, \forall k \in K, \quad (2.11)$$

$$u_{jk} \leq Q - (Q - q_j)x_{0jk}, \quad \forall j \in N, \forall k \in K, \quad (2.12)$$

$$u_{jk} \geq q_j + \sum_{i \in N \setminus \{j\}} q_i x_{ijk}, \quad \forall j \in N, \forall k \in K. \quad (2.13)$$

As restrições (2.11) são restrições de eliminação de sub-rotas. Elas asseguram que tendo dois clientes i e j e um veículo k , se o cliente j é servido após o cliente i pelo veículo k , $x_{ijk} = 1$ e $x_{jik} = 0$, então a sua carga após ter servido o cliente j é superior ou igual à soma da sua carga após ter servido o cliente i com o pedido do cliente j , isto é $u_{jk} \geq u_{ik} + q_j$. Se não há ligação entre os dois clientes i e j através do veículo k , $x_{ijk} = 0$ e $x_{jik} = 0$, então $u_{jk} \geq u_{ik} + q_j - Q$. As restrições (2.12) impõem que se um veículo sai do depósito 0, para atender um cliente i , então a carga após tê-lo servido não ultrapassa o seu pedido. A junção das restrições (2.12) com (2.10) obrigam que a carga do veículo k após ter servido o primeiro cliente da rota seja igual ao pedido do cliente. As restrições (2.13) asseguram que quando um veículo sai de um cliente qualquer para servir o cliente j , então a sua carga após ter servido o cliente j é superior

ou igual à soma do pedido do cliente j com o pedido do cliente donde veio o veículo. O conjunto das restrições (2.10) e (2.11) à (2.13) eliminam as sub-rotas e limitam a capacidade das rotas. Uma ilustração, com figura, ajuda a compreender como funciona essas restrições:



Podemos verificar que:

$$\begin{cases} x_{0ik} = 1 \Rightarrow u_{ik} = q_i \\ x_{ijk} = 1 \Rightarrow (q_i + q_j \leq Q \wedge u_{jk} \geq q_i + q_j) \\ x_{jrk} = 1 \Rightarrow (q_i + q_j + q_r \leq Q \wedge u_{rk} \geq q_i + q_j + q_r) \end{cases}$$

Com as condições anteriores satisfeitas, $x_{0ik} = x_{ijk} = x_{jrk} = 1$, o veículo k fica sujeito a duas situações, perante o cliente t :

- se $q_i + q_j + q_r + q_t \leq Q$ então o veículo k pode servir o cliente t ;
- se $q_i + q_j + q_r + q_t > Q$, então o cliente t não pode ser servido pelo veículo k , porque viola as restrições (2.10). Assim teremos $x_{rtk} = 0$.

Apresentemos agora um conjunto de formulações, com base na formulação **MTZ1**, fazendo algumas combinações entre as expressões que representam as restrições de eliminação de sub-rotas apresentadas até agora. Com estas combinações pretendemos verificar se podemos obter uma formulação melhor que a formulação **MTZ1**.

Formulação MTZ1_ (2.12): Esta formulação é obtida da **MTZ1** adicionando as restrições (2.12). A introdução destas restrições combinadas com (2.9) garante que se um veículo k sai do depósito 0 para servir o cliente i , então a sua carga após tê-lo servido passa a ser igual ao pedido do cliente, em vez de superior ou igual como dantes era.

Formulação MTZ1_ (2.13): Esta formulação é obtida da **MTZ1** adicionando as restrições (2.13). Estas restrições impõem que a carga de um veículo k após ter servido um cliente qualquer seja superior ou igual à soma do pedido desse cliente com o pedido do cliente que o antecede na rota.

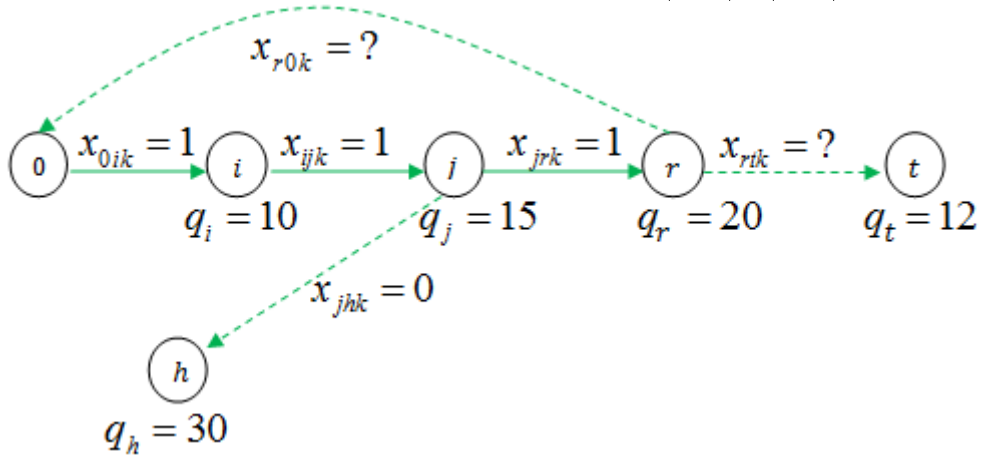
Formulação MTZ1_ (2.12)_ (2.13): Esta formulação é obtida da formulação **MTZ1** adicionando as restrições (2.12) e (2.13). A introdução deste conjunto de restrições impõem que a carga de um veículo após ter servido o primeiro cliente seja igual ao pedido desse cliente e a carga de um veículo após ter servido um cliente qualquer seja superior ou igual à soma do pedido desse cliente com o pedido do cliente que o antecede na rota.

Formulação MTZ1_MS: Para obter esta formulação tomamos a formulação **MTZ1** e substituímos as restrições (2.9) pelas restrições (2.11). Com esta substituição a formulação torna-se mais eficiente na eliminação das sub-rotas com dois clientes.

Formulação MTZ1-MS_ (2.12)_ (2.13) : Para elaborar a presente formulação recorreremos à formulação **MTZ1-MS** e adicionamos as restrições (2.12) e (2.13). Assim, se o cliente i for o primeiro a ser atendido pelo veículo k , a carga desse veículo após tê-lo servido deve ser igual ao seu pedido e não ultrapassar a capacidade do veículo; se o cliente j for atendido pelo veículo k , então a carga do veículo k após ter servido o cliente j é superior ou igual à soma dos pedidos dos clientes servidos pelo veículo k , começando do primeiro cliente da rota até ao cliente j .

De seguida, usamos uma figura ilustrativa para facilitar a compreensão. Consideramos um veículo k com capacidade 50, um depósito representado pelo vértice 0 e cinco clientes representados pelos vértices i, j, r, t e h , cada um com a sua procura, como indica a Figura 2.2. A partir da Figura 2.2, podemos verificar

Figura 2.2: Ilustração de MTZ1-MS_ (2.12)_ (2.13).



que se o veículo k sai do depósito 0 para atender o cliente i e de seguida atender o cliente j , $x_{0ik} = x_{ijk} = 1$, então não pode atender o cliente h , $x_{hk} = 0$,

porque em caso contrário viola o conjunto das restrições (2.10) e (2.11) à (2.13), isto é se $x_{0ik} = x_{ijk} = x_{jhk} = 1$ então, segundo as restrições (2.11) à (2.13), $u_{hk} \geq q_i + q_j + q_h = 55$ e, segundo as restrições (2.10), $u_{hk} \leq Q = 50$. Daí surge a contradição $55 \leq u_{hk} \leq 50$. Neste caso, o veículo pode atender o cliente r ou o cliente t . Se atender o cliente r , $x_{jrk} = 1$, não pode atender o cliente t , pelas mesmas razões que não atendeu o cliente h , mas sim regressa ao depósito, $x_{r0k} = 1$, porque, de acordo com as restrições (2.4), nenhum veículo pode ficar parado num cliente.

Mais a frente, na secção 2.3, através dos resultados computacionais poderemos comparar os benefícios, ou não, da inclusão dessas restrições.

As formulações que apresentamos até agora podem ainda modelar um PRV com veículos de capacidades diferentes. Para isso basta substituir a capacidade Q por Q_k , sendo Q_k a capacidade do veículo k .

Quando pretendemos usar todos os veículos disponíveis, substituímos as restrições (2.3) pelas restrições

$$\sum_{j \in V \setminus \{0\}} x_{0jk} = 1, \forall k \in K. \quad (2.14)$$

2.1.2 Formulação do PRV, usando Fluxos e variáveis x_{ijk}

Uma outra forma de lidar com a existência de sub-rotas é a de usar restrições de fluxos para as eliminar. para as formular podemos considerar que cada veículo k corresponde a uma quantidade de fluxo que é enviada do depósito 0 para cada cliente e que corresponde ao seu pedido. Considerando as variáveis binárias x_{ijk} , usadas nas formulações anteriores, e adicionalmente as variáveis contínuas f_{ijk} , para todo $i, j \in N | i \neq j$ e todo $k \in K$, que correspondem à quantidade de fluxos enviada do vértice i para o vértice j , através do veículo k , podemos obter uma outra formulação em programação linear inteira mista [14] que passamos a designar por **Fluxo1** e que consiste em

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk}, \quad (2.1)$$

sujeito a :

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in N, \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} \leq 1, \quad \forall k \in K, \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ijk} = \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{jik}, \quad \forall j \in V, \forall k \in K, \quad (2.4)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} (f_{ijk} - f_{jik}) = q_j, \quad \forall j \in N, \quad \forall k \in K, \quad (2.15)$$

$$f_{ijk} \leq Q x_{ijk}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall k \in K, \quad (2.16)$$

$$f_{ijk} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A, \quad \forall k \in K, \quad (2.17)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall k \in K. \quad (2.7)$$

Apenas as restrições (2.15) à (2.17) diferem das anteriores. As restrições (2.15) asseguram que, referente a cada cliente, a diferença entre a quantidade de fluxo que nele chega e a quantidade de fluxo que dele sai, através do veículo k , é igual à quantidade do pedido desse cliente. As restrições (2.16) impedem que o fluxo máximo que passa por um arco $(i, j) \in A$, através de um veículo k , seja superior à capacidade do veículo. As restrições (2.17) referem-se à não negatividade das variáveis f_{ijk} .

Tal como fizemos anteriormente, podemos contabilizar o número de variáveis e o número de restrições desta formulação. O número das variáveis do tipo f_{ijk} é igual ao número das variáveis do tipo x_{ijk} , $mn(n+1)$, somando um total de $2mn(n+1)$ variáveis, $\mathcal{O}(mn^2)$. Podemos contabilizar mn restrições no conjunto (2.15), $mn(n+1)$ restrições em (2.16) e $mn(n+1)$ em (2.17). Somando os números destas restrições com os das restantes restrições obtemos o número total das restrições expresso pela expressão algébrica $n + m + m(n+1) + mn + mn(n+1) + mn(n+1) + mn(n+1) = 3mn^2 + (5m+1)n + m$, $\mathcal{O}(mn^2)$. Considerando uma frota com 3 veículos disponíveis, $m = 3$, podemos construir uma tabela onde observamos a variação do número de variáveis e do número de restrições desta formulação, em função do número de clientes.

Variáveis e restrições referentes à formulação **Fluxo1**.

Número de clientes	4	7	10	11	12	13	25
Número de variáveis	120	336	660	792	936	1092	3900
Número de restrições	220	565	1072	1277	1500	1741	6037

Os números de variáveis e restrições desta formulação são superiores aos da formulação **MTZ1**. Por exemplo, verificamos que para uma instância com 25 clientes e 3 veículos, a formulação **MTZ1** tem 2025 variáveis e 4006 restrições, enquanto a formulação **Fluxo1** tem 3900 variáveis e 6037 restrições. Nos resultados computacionais far-se-á uma comparação entre as formulações.

Até agora apresentámos o grupo de formulações em que usamos as variáveis binárias x_{ijk} como principais variáveis de decisão. Doravante passamos a apresentar o grupo de formulações onde as principais variáveis de decisão passam a ser as variáveis binárias x_{ij} .

2.1.3 Formulações do PRV, usando MTZ e variáveis x_{ij}

Nesta secção imitamos as formulações MTZ usadas da secção 2.1.1 usando apenas um novo conjunto de variáveis binárias para indicar os arcos presentes na solução. Para introduzir uma nova formulação utilizamos as variáveis binárias x_{ij} , para todo $(i, j) \in A$, que assumem valor 1 se o arco (i, j) faz parte da solução e assumem o valor 0 em caso contrário, e as variáveis contínuas u_i , para todo $i \in N$, que representam a carga de um veículo após ter servido o cliente i . Com estas variáveis modelamos a seguinte formulação em programação linear inteira mista, que designamos por **MTZ2**:

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (2.18)$$

sujeito a :

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N, \quad (2.19)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ji}, \quad \forall j \in V, \quad (2.20)$$

$$u_j \geq u_i + q_j - Q(1 - x_{ij}), \quad \forall i, j \in N, i \neq j, \quad (2.21)$$

$$q_i \leq u_i \leq Q, \quad \forall i \in N, \quad (2.22)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (2.23)$$

A função objetivo (2.18) expressa o custo total a ser minimizado. As restrições (2.19) asseguram que cada cliente é servido exatamente uma vez. As restrições (2.20) correspondem às restrições de conservação de fluxo, impondo que, referente a cada vértice, o número de arcos de entrada seja igual ao número de arcos de saída. As restrições (2.21) e (2.22), conhecidas como restrições de *Miller, Tucker e Zemlin*, dizem respeito à eliminação de sub-rotas e a limitação de capacidade. As restrições (2.22) referem-se aos valores das variáveis contínuas u_i , para todo $i \in N$. As restrições (2.23) referem-se

à integralidade das variáveis binárias x_{ij} , para todo $(i, j) \in A$.

Para obter a relaxação linear do problema basta fazer a substituição das restrições (2.23) pelas restrições

$$x_{ij} \in [0, 1], \forall (i, j) \in A. \quad (2.24)$$

Quando, nesta formulação, pretendermos limitar o número de veículos na frota, adicionamos à formulação a restrição

$$\sum_{j \in V} x_{0j} \leq |K|. \quad (2.25)$$

A restrição (2.25) assegura que o número de rotas não ultrapassa o número de veículos disponíveis na frota. Se consideramos esta restrição como igualdade ela impõe que o número de rotas seja igual ao número de veículos disponíveis.

A formulação **MTZ2** tem menor número de variáveis e menor número de restrições que os das outras formulações apresentadas até agora. Podemos, em função de n , expressar o número das variáveis por $n(n+1)+n = n(n+2)$, $\mathcal{O}(n^2)$, e o número das restrições por $n + (n+1) + n(n-1) + 2n + n(n+1) = 2n^2 + 4n + 1$, $\mathcal{O}(n^2)$. De seguida apresentamos uma tabela que espelha a variação do número de variáveis e do número de restrições desta formulação, em função do número de clientes.

Número de variáveis e de restrições da formulação **MTZ2**.

Número de clientes	4	7	10	11	12	13	25
Número de variáveis	24	63	120	143	168	195	675
Número de restrições	49	127	241	287	337	391	1351

Os números de variáveis e restrições da formulação **MTZ2** são bastante inferiores aos da formulação **MTZ1**. Por exemplo, com 25 clientes e 3 veículos, de **MTZ1** para **MTZ2**, o número de variáveis reduzem-se de 2025 para 675 e o número de restrições passam de 4006 para 1351.

Tal como anteriormente a eliminação de sub-rotas e limitação de capacidade podem ser melhoradas pelo conjunto de restrições que se seguem [14]:

$$u_j \geq u_i + q_j - Q + Q(x_{ji} + x_{ij}) - (q_i + q_j)x_{ji}, \quad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (2.26)$$

$$u_j \leq Q - (Q - q_j)x_{0j}, \quad \forall j \in N \quad (2.27)$$

$$u_j \geq q_j + \sum_{i \in N \setminus \{j\}} q_i x_{ij}, \quad \forall j \in N \quad (2.28)$$

Com base na formulação **MTZ2** e à semelhança do que fizemos com a formulação **MTZ1** podemos elaborar um conjunto de formulações, como se seguem:

Formulação MTZ2_ (2.27): Esta formulação é obtida de **MTZ2** adicionando as restrições (2.27).

Formulação MTZ2_ (2.28): Para elaborar esta formulação recorremos à **MTZ2** e adicionando as restrições (2.28).

Formulação MTZ2_ (2.27)_ (2.28): Esta formulação é obtida de **MTZ2**, adicionando as restrições (2.27) e (2.28).

Formulação MTZ2-MS: Para obter esta formulação tomamos a formulação **MTZ2** e substituímos as restrições (2.21) por (2.26).

Formulação MTZ2-MS_ (2.27)_ (2.28): Esta formulação é obtida da formulação **MTZ2-MS**, adicionando o conjunto das restrições (2.27) e (2.28).

2.1.4 Formulação do PRV, usando Fluxos e variáveis x_{ij}

Consideramos as variáveis binárias x_{ij} , usadas na formulação **MTZ2**, e as variáveis contínuas adicionais f_{ij} , para todo $i, j \in N | i \neq j$, que correspondem a quantidade de fluxo enviado do vértice i para o vértice j . De seguida apresentamos uma formulação muito semelhante à anterior Fluxo1 que designamos por **Fluxo2**.

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}, \quad (2.18)$$

sujeito a :

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N, \quad (2.19)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ij} = \sum_{i \in V \setminus \{j\}} x_{ji}, \quad \forall j \in V, \quad (2.20)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{j\}} (f_{ij} - f_{ji}) = q_j, \quad \forall j \in N, \quad (2.29)$$

$$f_{ij} \leq Q x_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (2.30)$$

$$f_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (2.31)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A. \quad (2.23)$$

Apenas as restrições (2.29) à (2.31) diferem da formulação anterior, mas são semelhantes às correspondentes na formulação Fluxo1. As restrições (2.29) garantem que

relativamente a cada cliente $j \in N$, a diferença entre o fluxo que entra e o fluxo que sai é igual à procura do cliente. As restrições (2.30) impõem que o fluxo máximo a ser enviado de um vértice para outro não seja superior à capacidade do veículo. As restrições (2.31) referem-se à não negatividade das variáveis f_{ij} .

Passamos a contabilizar o número de variáveis e o número de restrições da formulação **Fluxo2**. Somando as $n(n+1)$ variáveis do tipo x_{ij} com as $n(n+1)$ variáveis do tipo f_{ij} , obtemos um total de $2n(n+1)$ variáveis, em função do número de clientes n , $\mathcal{O}(n^2)$. A expressão algébrica $n + (n+1) + n + n(n+1) + n(n+1) + n(n+1) = 3n^2 + 6n + 1$, $\mathcal{O}(n^2)$, representa o número total de restrições.

À semelhança de que fizemos para as formulações anteriores, construímos uma tabela onde registamos a variação do número de variáveis e de restrições em função do número de clientes.

Número de variáveis e de restrições da formulação **Fluxo2**.

Número de cliente	4	7	10	11	12	13	25
Número de variáveis	40	112	220	264	312	364	1300
Número de restrições	73	190	361	430	505	586	2026

Os números de variáveis e restrições da formulação **Fluxo2** são muito reduzidos em relação aos da formulação **Fluxo1**. Verificamos que para uma instância com 25 clientes e 3 veículos disponíveis o número de variáveis e de restrições da formulação **Fluxo1** são 3900 e 6037, respetivamente, enquanto a formulação **Fluxo2** são 1300 e 2026, respetivamente. Podemos ainda verificar que a formulação **Fluxo2** tem um número de variáveis e de restrições, respetivamente, superior ao número de variáveis e de restrições da formulação **MTZ2**. Recordamos que esta formulação tem 675 variáveis e 1351 restrições, quando consideramos uma instância com 25 clientes e 3 veículos disponíveis.

Verificamos que as formulações com variáveis binárias x_{ijk} são desvantajosas em termos do número de variáveis e de restrições e em relação às formulações com variáveis binárias x_{ij} . Contudo elas apresentam uma vantagem, porque permitem resolver problemas com veículos de capacidades diferentes, ao substituir Q por Q_k , para $k \in K$.

O quadro que se segue permite visualizar a diferença em termos de número de variáveis e de restrições das principais formulações, tendo em conta uma instância com 25 clientes e 3 veículos disponíveis.

Número de variáveis e de restrições, com 25 clientes e 3 veículos disponíveis.

	Formulação natural	Formulações estendidas			
Variáveis binárias	x_{ijk}	x_{ijk}		x_{ij}	
Formulação	FPRV	MTZ1	Fluxo1	MTZ2	Fluxo2
número de variáveis	1950	2025	3900	675	1300
número de restrições	100665355	4004	6037	1351	2026

Podemos observar o seguinte.

- As formulações com variáveis binárias x_{ijk} têm maiores números de restrições e de variáveis que as formulações com variáveis binárias x_{ij} .
- Para as formulações com variáveis binárias x_{ijk} , as formulações estendidas têm muito mais variáveis que a formulação natural.
- As formulações estendidas têm um número de restrições muito inferior ao número de restrições da formulação natural **FPRV**.
- Os números de variáveis e restrições das formulações com restrições de fluxos são superiores aos das formulações com restrições *MTZ*.

2.2 Exemplos do PRV

No que se segue vamos apresentar alguns exemplos do PRV para os quais determinamos a respetiva solução ótima. Para cada um desses exemplos pretendemos obter as constituições das rotas e o valor ótimo, usando as formulações apresentadas.

1. Instância 1

Uma empresa com sede na cidade do Porto (0) e três veículos disponíveis, com capacidades diferentes, pretende distribuir mercadorias, ao custo mínimo, a quatro filiais situadas nas cidades de Lisboa (1), Madrid (2), Paris (3) e Londres (4), cada uma com o seu pedido. Utilizamos os números entre parênteses para representar as cidades correspondentes. O veículo 1 tem capacidade 200 unidades de peso (*u.p.*), o veículo 2 tem capacidade 300 *u.p.* e o veículo 3 tem capacidade 350 *u.p.*. Na Tabela 2.2 estão as informações sobre os pedidos das filiais e os custos de viagem entre as cidades. A primeira linha, assim como a primeira coluna, até à sexta linha, indicam os nomes das cidades. A última linha indica os pedidos dos clientes. Em cada uma das restantes linhas indicamos os custos entre a cidade

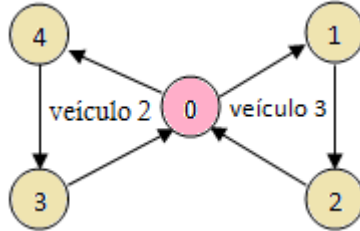
Tabela 2.2: Custos de viagem e procuras, na Instância 1.

	Porto	Lisboa	Madrid	Paris	Londres
Porto	0	321	604	1766	2121
Lisboa	321	0	636	1815	2227
Madrid	604	636	0	1249	1635
Paris	1736	1815	1249	0	366
Londres	2121	2227	1635	366	0
q_i		85	150	200	80

indicada na linha e cada uma das cidades indicadas nas colunas.

A solução ótima com custo total 5784 unidades monetárias ($u.m.$) é constituída por duas rotas, como ilustra a Figura 2.3 e que indicamos a seguir. O veículo 2 sai do Porto com 280 $u.p.$, segue com destino a Londres, depois a Paris e regressa ao Porto. O veículo 3 sai do Porto com 235 $u.p.$, segue para Lisboa depois Madrid e regressa ao Porto.

Figura 2.3: Solução ótima da Instância 1.



2. Instância 2

Nesta instância há um depósito situado na cidade do Porto (0) e 7 clientes situados em Lisboa (1), Madrid (2), Paris (3), Londres (4), Frankfurt (5), Bruxelas (6) e Amesterdão (7). Há ainda três veículos disponíveis com capacidades diferentes. O veículo 1 tem capacidade 400 $u.p.$, o veículo 2 tem capacidade 300 $u.p.$ e o veículo 3 tem capacidade 500 $u.p.$. Os outros dados estão na Tabela 2.3.

Observamos que nesta instância há casos em que o custo de viagem de uma cidade i para outra cidade j é diferente do custo de viagem de j para i , isto é, a matriz de custo não é simétrica. Por exemplo, $c_{01} = 350 \neq c_{10} = 321$.

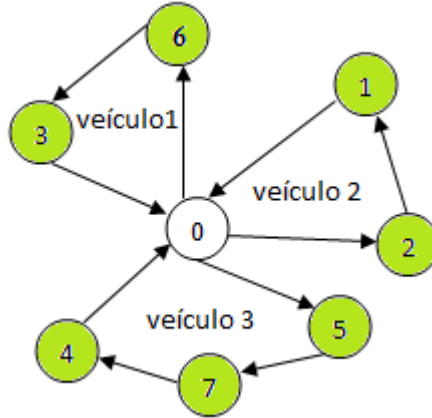
A Figura 2.4 ilustra a solução ótima da Instância 2 com custo total 10716 $u.m.$.

Tabela 2.3: Custos de viagem e procuras, da Instância 2.

i	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	350	604	1736	2121	2337	2032	2250
1	321	0	700	1815	2227	2474	2114	2485
2	604	636	0	1249	1635	1851	1572	1780
3	1736	1815	1249	0	400	587	300	506
4	2121	2227	1635	366	0	602	220	197
5	2337	2474	1851	587	602	0	382	436
6	2032	2114	1572	296	220	382	0	210
7	2242	2485	1800	506	197	450	210	0
q_i		85	150	200	80	150	200	200

A solução ótima é constituída por 3 rotas. Em duas delas são visitadas 2 clientes e noutra são visitados 3 clientes. O veículo 1 transporta $400u.p.$, o veículo 2 transporta $235u.p.$ e o veículo 3 transporta $430u.p.$.

Figura 2.4: Solução ótima da Instância 2.



3. Instância 3

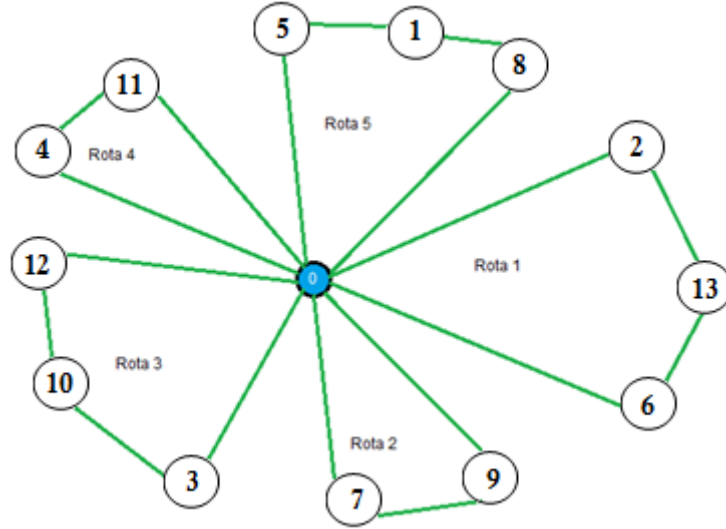
Nesta instância temos 1 depósito e 13 clientes. Os dados desta instância estão registados na Tabela 2.4. O depósito 0 e os clientes $i = 1, 2, \dots, 13$ estão identificados na primeira linha e na primeira coluna.

Consideramos um número ilimitado de veículos idênticos, cada um com capacidade $500u.p.$.

A solução ótima desta instância com custo total $18272u.m.$ encontra-se ilustrada na Figura 2.5 e é constituída por 5 rotas. Há duas delas em que são visitados 2 clientes e em cada uma das restantes 3 rotas são visitados 3 clientes. Na rota 1 são transportadas $482u.p.$, na rota 2 são transportadas $385u.p.$, na rota 3 são transportadas $495u.p.$, na rota 4 são transportadas $365u.p.$ e na rota 5 são

transportadas $450u.p.$.

Figura 2.5: Solução ótima da Instância 3.



4. Instância 4

Os dados desta instância estão registrados na Tabela 2.4 que indica o custo de transporte entre as localidades indicadas na primeira linha e na primeira coluna. Na última linha da tabela indicamos os pedidos dos clientes pertencentes às respectivas localidades. Os veículos são idênticos e todos têm a mesma capacidade $600u.p.$.

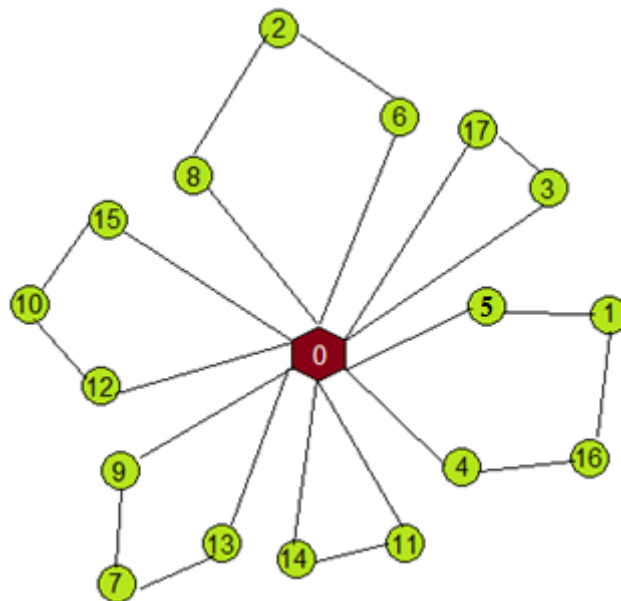
A Figura 2.6 representa a solução ótima da Instância 4 com custo total $23005u.m.$. A solução é constituída por 6 rotas. Na rota em que são visitados os clientes 11 e 14 são transportados $509u.p.$. A rota que serve os clientes 7, 9 e 13 transporta $517u.p.$. Para servir os clientes 10, 12 e 15 são transportadas $595u.p.$. Na rota em que são visitados os clientes 2, 6 e 8 são transportadas $565u.p.$. Para servir os clientes 3 e 17, são transportadas $600u.p.$. Na rota em que são visitados os clientes 1, 4, 5 e 16 são transportadas $565u.p.$.

5. Instância 5

Consideramos agora uma das instâncias de referência, $R201$, que faz parte da base de dados de VRPTW BENCHMARK PROBLEMS que se encontra disponível no site <http://w.cba.neu.edu/~msolomon/problems.htm>.

Tomamos o depósito central representado pelo número 1, e usamos apenas os 40 primeiros clientes. Consideramos veículos idênticos, cada um com capacidade de $300u.p.$. As distâncias entre as localidades que usamos são aproximadas às unidades.

Figura 2.6: Solução ótima da Instância 4.



A solução ótima, com distância total 432, é constituída por 2 rotas distribuídas da seguinte forma.

Na rota 1 o veículo transporta $272u.p.$ e a sequência das visitas é a seguinte:

$1 \rightarrow 27 \rightarrow 41 \rightarrow 22 \rightarrow 5 \rightarrow 26 \rightarrow 40 \rightarrow 24 \rightarrow 23 \rightarrow 3 \rightarrow 16 \rightarrow 15 \rightarrow 39 \rightarrow 17 \rightarrow 18 \rightarrow 6 \rightarrow 38 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 1$

Na rota 2 o veículo transporta $291u.p.$ e a sequência das visitas é a seguinte:

$1 \rightarrow 29 \rightarrow 13 \rightarrow 25 \rightarrow 30 \rightarrow 4 \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 36 \rightarrow 10 \rightarrow 21 \rightarrow 31 \rightarrow 33 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 20 \rightarrow 37 \rightarrow 9 \rightarrow 19 \rightarrow 8 \rightarrow 32 \rightarrow 2 \rightarrow 28 \rightarrow 1$

6. Instância 6

Aqui tomamos novamente os dados da Instância 5 e diminuimos a capacidade dos veículos. Cada veículo disponível passa a ter capacidade de $200u.p.$ em vez de $300u.p.$. A solução ótima tem custo total $455u.m.$ e é formada pelas seguintes rotas.

Rota 1:

$1 \rightarrow 7 \rightarrow 38 \rightarrow 15 \rightarrow 39 \rightarrow 17 \rightarrow 18 \rightarrow 6 \rightarrow 19 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 37 \rightarrow 20 \rightarrow 12 \rightarrow 11 \rightarrow 32 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 197.

Rota 2:

$1 \rightarrow 14 \rightarrow 3 \rightarrow 16 \rightarrow 23 \rightarrow 24 \rightarrow 40 \rightarrow 26 \rightarrow 5 \rightarrow 22 \rightarrow 41 \rightarrow 27 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 178.

Rota 3:

$1 \rightarrow 29 \rightarrow 13 \rightarrow 25 \rightarrow 30 \rightarrow 4 \rightarrow 34 \rightarrow 35 \rightarrow 36 \rightarrow 10 \rightarrow 21 \rightarrow 33 \rightarrow 31 \rightarrow 2 \rightarrow 28 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 188.

Notamos que a redução da capacidade dos veículos de 300 para 200 fez aumentar o número de rotas, de 2 para 3, e aumentar o custo total, de 432 para 455.

2.3 Resultados computacionais

Para efetuar uma comparação das formulações, escrevemos as formulações em código Mosel e utilizamos o software Xpress, versão 7.3, num computador com processador AMD V120, 2.20 GHZ e com 4.00GB(3.49GB utilizável) de RAM. Fixamos 3600 segundos para o tempo limite de execução do software e pedimos o valor e o tempo, tanto da solução ótima como da relaxação linear. A execução do programa termina quando é encontrada a solução ótima ou quando se esgota o tempo limite. Terminada a execução, é fornecido o valor da relaxação linear com o respetivo tempo de execução, o valor da solução admissível e o tempo total de execução, informando se há confirmação de que a solução é ótima ou se o tempo prefixado é insuficiente para o confirmar. No Xpress é utilizado o primal ou o dual do simplex para obter a relaxação linear e o método Branch & Bound para obter a solução ótima. Assim sendo, quando o tempo prefixado não é suficiente para obter a solução ótima, é apresentada a melhor solução admissível encontrada durante esse tempo. Com esses resultados pretendemos comparar as formulações apresentadas, com principal destaque nos tempos computacionais e nos valores da relaxação linear. Vamos considerar dois grupos de instâncias. Um conjunto de instâncias que construímos a partir de dados gerados e outro conjunto de instâncias de referência (obtidas da net).

2.3.1 Instâncias construídas

No conjunto das instâncias construídas usamos o mesmo conjunto de dados para construir três exemplos. Para isso, consideramos uma empresa com sede (depósito) em Amsterdão (0) que pretende distribuir mercadorias às 17 filiais (clientes) situadas nas cidades de Atenas (1), Berlin (2), Berna (3), Bruxelas (4), Budapeste (5), Copenhaga (6), Estocolmo (7), Frankfurt (8), Helsínquia (9), Lisboa (10), Londres (11), Madrid

(12), Oslo (13), Paris (14), Porto (15), Roma (16) e Viena (17). Entre parêntesis indicamos o número atribuído a cada cliente.

A Tabela 2.4 apresenta os custos entre as cidades e os pedidos dos clientes. Na primeira linha, bem como na primeira coluna excepto a última linha, estão indicados os números correspondentes às cidades. Na última linha está indicado o pedido referente ao cliente correspondente a cada coluna. Em cada uma das restantes linhas indicamos o custo entre a cidade indicada pelo seu número e cada uma das cidades indicadas na primeira linha.

Usamos estes dados para construir 3 exemplos de diferentes dimensões, com veículos idênticos de capacidade 500:

- **Exemplo 1**, formado pelos 17 clientes e 8 veículos disponíveis;
- **Exemplo 2**, formado pelos 13 primeiros clientes e 6 veículos disponíveis;
- **Exemplo 3**, formado pelos 7 primeiros clientes e 4 veículos disponíveis;

Nas Tabelas 2.5, 2.6 e 2.7 estão indicados os resultados computacionais destes Exemplos, utilizando todas as formulações apresentadas até agora. Na primeira coluna constam as principais variáveis de decisão, referentes a cada grupo de formulações. A segunda coluna indica o nome de cada formulação. Na terceira e na quarta coluna estão indicados os valores e os tempos, respetivamente, da relaxação linear, obtidos com a formulação correspondente a cada linha. Na quinta e na sexta coluna estão os valores e os tempos, respetivamente, da melhor solução admissível obtida, obtidos com a formulação correspondente a cada linha. Os números a negrito correspondem aos valores ótimos confirmados.

Tendo em conta que o **PRV** é um problema de minimização, o valor da relaxação linear corresponde a um limite inferior do valor ótimo e o valor da solução admissível apresentado corresponde a um limite superior do valor ótimo.

Tabela 2.4: Custo de viagem entre as cidades e os respectivos pedidos.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	3122	686	852	210	1476	929	1584	436	1708	2485	197	1780	1549	506	2242	1768	1182
1	3122	0	2646	2337	3063	1646	3270	3925	2481	3428	4484	3267	3832	3890	2871	4318	2480	1755
2	686	2646	0	974	817	900	724	1379	520	1421	2887	871	2366	1344	1115	3191	1651	661
3	852	2337	974	0	672	1117	1344	1999	1457	2544	2230	759	1731	1964	534	2217	982	873
4	210	3063	817	672	0	1417	1078	1733	382	2238	2114	220	1572	1698	296	2032	1545	1127
5	1476	1646	900	1117	1417	0	1344	1999	956	1782	3475	1796	2823	1964	1513	3309	1395	278
6	929	3270	724	1344	1078	1344	0	655	958	892	3229	2113	2641	620	1379	3115	2088	1105
7	1584	3925	1379	1999	1733	1999	655	0	1813	237	3086	2768	3296	590	2034	3770	2730	1799
8	436	2481	520	1457	382	956	958	1813	0	2175	2474	602	1851	1578	587	2337	1353	727
9	1708	3428	1421	2544	2238	1782	892	237	2175	0	4927	2492	4228	827	2744	4781	3007	1831
10	2485	4484	2887	2230	2114	3475	3229	3086	2474	4927	0	2227	636	3783	1815	321	2709	3200
11	197	3267	871	759	220	1796	2113	2768	602	2492	2227	0	1635	2733	366	2121	1876	1347
12	1780	3832	2366	1731	1572	2823	2641	3296	1851	4228	636	1635	0	3281	1249	604	2038	2529
13	1549	3890	1344	1964	1698	1964	620	590	1578	827	3783	2733	3281	0	1999	3735	2703	1780
14	506	2871	1115	534	296	1513	1379	2034	587	2744	1815	366	1249	1999	0	1736	1490	1248
15	2242	4318	3191	2217	2032	3309	3115	3770	2337	4781	321	2121	604	3735	1736	0	2524	3090
16	1768	2480	1651	982	1545	1395	2088	2730	1353	3007	2708	1876	2038	2703	1490	2524	0	1184
17	1182	1755	661	873	1127	278	1105	1799	727	1831	3200	1347	2529	1780	1248	3090	1184	0
q_i		85	150	200	80	150	200	200	215	185	200	285	95	132	224	300	250	400

Tabela 2.5: Resultados do Exemplo 1.

Variáveis binárias	Formulação	Relaxação Linear		Solução admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo
x_{ijk}	MTZ1	10840	0,234	28090	3599,59
	MTZ1_(2.12)	10840	0,202	28090	3599,25
	MTZ1_(2.13)	10840	0,281	28090	3599,51
	MTZ1_(2.12)_(2.13)	10840	0,171	28090	3599,71
	MTZ1-MS	10840	0,19	28090	3599,94
	MTZ1-MS_(2.12)_(2.13)	10840	0,235	28090	3600
	Fluxo1	21689,6	0,546	28090	3599,24
x_{ij}	MTZ2	11708,4	0,016	28090	10,000
	MTZ2_(2.27)	11708,4	0,015	28090	9,314
	MTZ2_(2.28)	11838,9	0,016	28090	7,581
	MTZ2_(2.27)_(2.28)	11915,8	0,032	28090	8,548
	MTZ2-MS	11919	0,016	28090	12,137
	MTZ2-MS_(2.27)_(2.28)	12224,8	0,031	28090	10,094
	Fluxo2	21689,6	0,031	28090	14,789

Observando a Tabela 2.5 onde constam os resultados computacionais do Exemplo 1, verificamos o seguinte.

- O pior valor da relaxação linear foi obtido usando as formulações com restrições MTZ e variáveis binárias x_{ijk} (formulações apresentadas na Secção 2.1.1). Todas as formulações deste grupo apresentaram o mesmo valor da relaxação linear.
- Ambas as formulações com restrições de fluxos apresentam o mesmo valor de relaxação linear, tanto aquela com variáveis binárias x_{ijk} , **Fluxo1**, como aquela com variáveis binárias x_{ij} , **Fluxo2**. O valor da relaxação linear obtido com estas formulações é o melhor de entre todos os valores obtidos.
- No grupo das formulações com variáveis binárias x_{ij} , os melhores valores de relaxação linear foram obtidas com formulações com restrições de fluxos, seguidas da que contém as restrições (2.26) à (2.28), **MTZ2_MS_(2.27)_(2.28)**. A introdução das restrições (2.28) melhora o valor da relaxação linear.
- As formulações com restrições (2.26), **MTZ2_MS**, apresentam melhores valores de relaxação linear que as formulações com restrições (2.21), **MTZ2**. Portanto, a substituição das restrições (2.21) pelas restrições (2.26) corresponde a um melhoramento da formulação.

- Usando qualquer uma das formulações, o tempo computacional necessário para obter o valor da relaxação linear é muito baixo.
- Todas as formulações com variáveis binárias x_{ij} permitiram determinar e confirmar o valor da solução ótima em menos de 15 segundos, enquanto nenhuma das formulações com variáveis binárias x_{ijk} permitiu confirmar a otimalidade do valor da solução admissível encontrada, perante o tempo preestabelecido. No entanto, podemos observar que este valor é ótimo, porque é igual ao valor encontrado com o uso das formulações que possuem variáveis binárias x_{ij} .

Tabela 2.6: Resultados do Exemplo 2.

Variáveis binárias	Formulação	Relaxação Linear		Solução admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo
x_{ijk}	MTZ1	8969	0,063	19272	1864,39
	MTZ1_(2.12)	8969	0,062	19272	577,206
	MTZ1_(2.13)	8969	0,078	19272	741,532
	MTZ1_(2.12)_(2.13)	8969	0,078	19272	3599,29
	MTZ1-MS	8969	0,078	19272	3599,75
	MTZ1-MS_(2.12)_(2.13)	8969	0,078	19272	1214,51
	Fluxo1	14979,5	0,156	19272	3599,88
x_{ij}	MTZ2	11127,1	0,016	19272	4,087
	MTZ2_(2.27)	11127,1	0,015	19272	4,244
	MTZ2_(2.28)	11127,1	0,016	19272	3,697
	MTZ2_(2.27)_(2.28)	11127,1	0,015	19272	2,964
	MTZ2-MS	12845	0,015	19272	6,194
	MTZ2-MS_(2.27)_(2.28)	12845	0,031	19272	3,993
	Fluxo2	14979,5	0,031	19272	3,838

Observando a Tabela 2.6 onde constam os resultados computacionais do Exemplo 2, verificamos o seguinte.

- À semelhança do Exemplo 1, as formulações com restrições MTZ e variáveis binárias x_{ijk} apresentam um valor da relaxação linear pior que os valores encontrados com o uso das outras formulações.
- As formulações com restrições de fluxos continuam a apresentar o melhor valor da relaxação linear.
- No grupo das formulações com variáveis binárias x_{ij} e restrições **MTZ**, há dois valores da relaxação linear, sendo o melhor obtido com formulações que contêm

as restrições (2.26), **MTZ-MS**, em vez das formulações com restrições (2.21), **MTZ2**. Isto ajuda a confirmar que as restrições (2.26) são um melhoramento das restrições (2.21).

- Com o uso das formulações com variáveis binárias x_{ij} , foram obtidas soluções ótimas num tempo computacional bastante reduzido, não superior a 6,194 segundos.
- Nem todas as formulações com variáveis x_{ijk} permitiram confirmar o valor ótimo, no tempo limite fixado inicialmente. No entanto, algumas das formulações deste grupo permitiram confirmar a otimalidade em tempo computacional não inferior a 577,206;
- As formulações MTZ1_(2.12), MTZ1_(2.13), MTZ1-MS_(2.12)_(2.13) e MTZ1 ficam desta forma por ordem crescente em termos de tempo de execução computacional.

Tabela 2.7: Resultados do Exemplo 3.

Variáveis binárias	Formulação	Relaxação Linear		Solução admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo
x_{ijk}	MTZ1	6970	0,016	11192	3,354
	MTZ1_(2.12)	6970	0,015	11192	1,311
	MTZ1_(2.13)	6970	0,015	11192	1,623
	MTZ1_(2.12)_(2.13)	6970	0,031	11192	1,732
	MTZ1-MS	6970	0,059	11192	2,738
	MTZ1-MS_(2.12)_(2.13)	6970	0,031	11192	2,231
	Fluxo1	8967,58	0,031	11192	3,666
x_{ij}	MTZ2	7620,55	0,015	11192	0,437
	MTZ2_(2.27)	7620,55	0	11192	0,328
	MTZ2_(2.28)	7620,55	0,016	11192	0,406
	MTZ2_(2.27)_(2.28)	7620,55	0	11192	0,312
	MTZ2-MS	8278	0,016	11192	0,187
	MTZ2-MS_(2.27)_(2.28)	8278	0	11192	0,499
	Fluxo2	8967,58	0,016	11192	0,468

Observando a Tabela 2.7 onde constam os resultados computacionais do Exemplo 3, verificamos o seguinte.

- A comparação das formulações, em termos dos valores da relaxação linear, seguem o que já foi dito para o Exemplo 2. O pior valor da relaxação linear foi obtido

usando as formulações com restrições MTZ e variáveis binárias x_{ijk} . O melhor valor da relaxação linear foi encontrada com as formulações com restrições de fluxos. No grupo das formulações com restrições MTZ e variáveis binárias x_{ij} o melhor valor da relaxação linear foi obtido com as formulações com restrições (2.26) (formulação MTZ2-MS e formulação MTZ2-MS_ (2.27)_(2.28)) em vez das formulações com restrições (2.21).

- Usando qualquer uma das formulações, foi obtida a solução ótima em tempo computacional bastante reduzido. Mesmo assim, podemos observar uma ligeira vantagem quando usamos as formulações com variáveis x_{ij} em vez das formulações com variáveis x_{ijk} . A solução ótima do Exemplo 3 foi obtida em menos de 0,5 segundos, usando as formulações com variáveis binárias x_{ij} , e entre 1,3 à 3,7 segundos, usando as formulações com variáveis binárias x_{ijk} .

Relativamente aos três exemplos verificamos o seguinte.

- Todas as formulações permitiram encontrar o valor da solução admissível correspondente ao valor ótimo de cada exemplo. Contudo, considerando o tempo limite estabelecido, nem todas permitiram confirmar se a solução é ótima.
- As formulações com restrições de fluxos foram as que obtiveram melhores resultados ao resolver a relaxação linear, apesar de serem formulações com número de variáveis e de restrições mais elevado.
- Quanto maior o número de clientes, maior é o tempo computacional necessário para determinar a solução ótima, usando a mesma formulação. Para exemplificar, podemos recorrer às Tabelas 2.5, 2.6, e 2.7 e em particular a terceira linha da cada uma dessas tabelas onde verificamos a evolução do tempo usado para obter uma solução admissível.
- As formulações com variáveis binárias x_{ijk} requerem mais tempo computacional que as formulações com variáveis binárias x_{ij} . Notamos que para resolver o Exemplo 1, utilizando os modelos com as variáveis binárias x_{ijk} , 3600 segundos não foram suficientes para confirmar a solução ótima, enquanto que com o uso das formulações com variáveis binárias x_{ij} foram confirmadas as soluções ótimas para todas as instâncias em, no máximo, 14,789 segundos. Para o Exemplo 2, o tempo máximo gasto, usando as formulações com variáveis binárias x_{ij} foi de 6,308 segundos, enquanto que, usando outro grupo de formulações, o tempo mínimo foi de 577,206 segundos. Convém referir que nem todas as formulações

com variáveis binárias x_{ijk} permitiram confirmar a solução ótima, mesmo após 3600 segundos.

- As formulações com variáveis binárias x_{ij} são melhores que as formulações com variáveis binárias x_{ijk} , tanto em termos do valor da relaxação linear como em termos do tempo computacional.

2.3.2 Instâncias de referência

Consideramos agora algumas instâncias da base de dados VRPTW BENCHMARK PROBLEMS disponíveis no site <http://w.cba.neu.edu/~msolomon/problems.htm>.

Dessas instâncias escolhemos as nomeadas R101 e RC101, para as quais são conhecidas as coordenadas geográficas das localidades, os pedidos dos clientes e as capacidades dos veículos. As duas instâncias são constituídas por um depósito e 100 clientes. Usamos cada uma delas considerando também apenas uma parte dos clientes na medida em que construímos instâncias compostas pelos 20, 50 ou 100 primeiros clientes. Fazemos variar as capacidades dos veículos em cada uma delas e apresentamos os resultados computacionais na Tabela 2.8. Para obter os resultados computacionais utilizamos apenas as duas formulações que consideramos melhores, **MTZ2-MS** $_{(2.27)}_{(2.28)}$ e **Fluxo2**. Deixamos de lado as formulações com variáveis binárias x_{ijk} . Para as instâncias formadas por 50 e 100 clientes fixámos 1800 segundos como tempo limite de execução no Xpress. O programa termina quando é confirmado o valor ótimo ou quando se esgota o tempo limite previamente fixado. Para as instâncias compostas por 20 clientes não limitámos o tempo computacional.

A Tabela 2.8 apresenta os resultados computacionais das instâncias que acabamos de referir. A primeira coluna indica o nome da instância (no formato $I.n.Q$) composta por três componentes separadas por pontos. A primeira componente (I) corresponde ao nome da instância original usada para formar novas instâncias. A segunda componente (n) corresponde ao número de clientes da nova instância e a terceira componente (Q) corresponde à capacidade de cada veículo da frota correspondente à nova instância. As cinco colunas seguintes fornecem os valores computacionais obtidos com a formulação **Fluxo2**. A segunda e terceira colunas fornecem o valor e o tempo da relaxação linear, respetivamente. A quarta e quinta colunas indicam, respetivamente, o valor e o tempo da solução admissível. A sexta coluna indica o $Gap = \frac{\text{Valor da Solução Admissível} - \text{Valor da relaxação Linear}}{\text{Valor da Solução Admissível}}$ correspondente a cada instância. O próximo grupo das cinco últimas colunas apresenta os resultados obtidos com a formulação **MTZ2-MS** $_{(2.27)}_{(2.28)}$.

Tabela 2.8: Resultados computacionais das instâncias de referência.

Probl.	Fluxo2						MTZ2-MS_ (2.27) _ (2.28)					
	Relaxação Linear			Solução Admissível			Relaxação Linear			Solução Admissível		
	Valor		Tempo	Valor		Tempo	Valor		Tempo	Valor		Tempo
	Valor	Tempo		Valor	Tempo		Valor	Tempo		Valor	Tempo	GAP
R101.20.50	361,24	0,016		402	4,477		247	0,016		402	21572*	0,386
R101.20.200	255,435	0,016		279	3,65		247	0,000		279	139,839	0,115
R101.50.100	588,02	0,593		735	1799,69		445	0,141		777	1799,14	0,427
R101.50.500	424,414	0,436		471	1799,26		445	0,109		471	1799,45	0,055
R101.100.200	725,1	10,155		962	1800,01		616	0,686		1024	1799,73	0,398
R101.100.1000	584,76	11,216		731	1799,82		616	0,796		651	1799,29	0,054
RC101.20.50	653,2	0,016		767	1526,58		147,004	0,016		767	5280,86	0,808
RC101.20.200	214,25	0,032		283	13,977		90	0,000		285	28237*	0,502
RC101.50.100	843	0,328		911	1799,35		198	0,194		931	1799,46	0,787
RC101.50.500	292,44	0,577		432	1799,24		198	0,16		479	1799,94	0,587
RC101.100.200	828,925	6,271		1245	1799,39		570	1,092		1332	1799,41	0,572
RC101.100.100	549,416	7,566		1046	1799,65		70	1,267		787	1799,4	0,911

* Execução interrompida.

Os resultados registados na Tabela 2.8 permitem-nos fazer as seguintes considerações.

- Com a formulação **Fluxo2** obtivemos confirmação do valor ótimo para todas as instâncias formadas por 20 clientes, enquanto que com a formulação **MTZ2-MS**_(2.27)_(2.28) há 2 instâncias para as quais não foram confirmadas as soluções ótimas, mesmo em tempo relativamente elevado. Por exemplo, para a instância RC201.20.200 não foi obtido o valor ótimo, mesmo em 28237 segundos, usando a formulação **MTZ2-MS**_(2.27)_(2.28), enquanto que para a mesma instância o valor ótimo é confirmado, usando a formulação **Fluxo2**, em 13,977 segundos. Isto mostra mais uma vez que há vantagem no uso das restrições de fluxos em relação às restrições MTZ.
- Em cada instância, o aumento das capacidades dos veículos contribuiu para redução do valor da solução admissível. A título de exemplo, podemos observar os resultados computacionais de duas instâncias quaisquer cuja única diferença está nas capacidades dos veículos. Em concreto, observemos os valores de soluções admissíveis, neste caso valores ótimos, das instâncias R101.20.50 e R101.20.200. A primeira dispõe de veículos com capacidade 50 e tem solução ótima com valor $402u.m.$. A segunda dispõe de veículos com capacidade 200 e tem solução ótima com valor $279u.m.$.
- O GAP obtido com a formulação **Fluxo2** é inferior ao GAP obtido com a formulação **MTZ2-MS**_(2.27)_(2.28), salvo para as instâncias R101.50.500 e R101.100.1000;
- O tempo para obter o valor da relaxação linear é bastante reduzido, usando ambas as formulações. Contudo, a formulação **MTZ2-MS**_(2.27)_(2.28) apresenta uma ligeira vantagem em relação à formulação **Fluxo2**.

Capítulo 3

Problema de Roteamento de Veículos com Janelas Temporais

O Problema de Roteamento de Veículos com Janelas Temporais (PRVJT), em inglês *Vehicle Routing Problem with Time Windows (VRPTW)*, é uma extensão do PRV na qual são consideradas restrições adicionais referentes às janelas temporais. Tal como no PRV, o objetivo é o de estabelecer rotas para uma frota de veículos em que cada veículo deve partir de um depósito, satisfazer os pedidos de certos clientes geograficamente dispersos e retornar ao depósito. Tudo deve ser efetuado para que o custo de viagem seja mínimo, a capacidade do veículo seja respeitada e além disso, neste caso com janelas temporais, o atendimento inicie dentro do intervalo temporal especificado por cada cliente e o veículo deve permanecer no local durante o tempo de serviço [4]. Este tipo de janela temporal é geralmente chamado de janela temporal rígida. Em diversas situações práticas a violação das janelas temporais é aceitável e, apesar de implicar uma penalidade, pode permitir obter consideráveis poupanças, mantendo ao mesmo tempo, um serviço aceitável [15]. Nesta situação a janela temporal diz-se flexível. Numa janela temporal rígida não se aceitam violações, pelo que, se o veículo chegar a um cliente antes da hora mais cedo, especificada na janela temporal, deve esperar para iniciar o serviço [3].

Como já referimos inicialmente, o PRVJT pertence à classe de problemas NP-Difíceis.

Este capítulo, à semelhança do capítulo anterior, encontra-se dividido em três secções. Na primeira secção propomos formulações em programação linear inteira mista para um PRVJT. Na segunda secção resolvemos alguns exemplos para os quais apresentamos o valor ótimo e descrevemos as rotas. Na terceira secção consideramos algumas instâncias de uma base de dados referência, obtidas da net, para realizar um estudo computaci-

onal. Os resultados computacionais obtidos permitem-nos comparar as formulações e analisar o comportamento das soluções das referidas instâncias, com especial destaque para a capacidade dos veículos e para as janelas temporais.

Neste trabalho, tendo em conta a forma de classificar um PRV proposta por *Bodin e Golden* (ver Capítulo 1), consideramos um PRVJT com as seguintes características:

- um depósito;
- vários veículos, todos com a mesma capacidade;
- parâmetros de natureza determinística;
- grafo orientado;
- localização dos clientes nos vértices;
- entrega de mercadorias;
- janela temporal rígida;
- objetivo de minimizar o custo total.

3.1 Formulação do PRVJT

Nesta secção, à semelhança da Secção 2.1, apresentamos dois grupos de formulações: um em que as principais variáveis de decisão são as variáveis binárias x_{ij} e outro em que as principais variáveis de decisão são as variáveis binárias x_{ijk} . Além disso, a cada cliente associamos um tempo de serviço que deve ser cumprido dentro do intervalo temporal correspondente.

3.1.1 Formulação do PRVJT, usando variáveis x_{ijk}

Para formular o problema, usando as variáveis binárias x_{ijk} , definimos o PRVJT num grafo orientado $G = (V^*, A^*)$, em que $V^* = N \cup \{0, n+1\}$ sendo $N = \{1, \dots, n\}$ o conjunto de vértices correspondentes aos clientes e $A^* = \{(i, j), (0, j), (i, n+1) | i, j \in N, j \neq i\}$ o conjunto de arcos. O depósito é representado por dois vértices: o vértice 0 que representa a origem e o vértice fictício $n+1$ que foi criado para representar o destino, apenas para simplicidade nos modelos. A utilização do vértice fictício facilita a distinção entre o tempo de partida e o tempo de chegada referente ao depósito.

Desta forma podemos considerar cada rota como um caminho que inicia no vértice 0 e termina no vértice $n + 1$. A cada arco $(i, j) \in A^*$ é associado um custo c_{ij} e um tempo de viagem t_{ij} de i para j . Consideramos um conjunto $K = \{1, 2, \dots, m\}$ de veículos idênticos, todos com capacidade Q . Para servir os n clientes, os veículos devem partir do depósito 0 e, após visitar os clientes, regressar ao depósito representado por $n + 1$. Cada cliente $i \in N$ tem uma procura q_i que deve ser satisfeita por um único veículo durante uma janela temporal definida pelo intervalo $[a_i, b_i]$. A cada cliente $i \in N$ é também associado um tempo de serviço s_i que não deve ultrapassar a amplitude do intervalo temporal correspondente. Uma janela temporal está também associada ao depósito representado por 0 e por $n + 1$, isto é, $[a_0, b_0] = [a_{n+1}, b_{n+1}] = [A, B]$, onde $A \leq \min\{b_i - t_{0i} - s_i, \forall i \in N\}$ representa a possível hora mais cedo de partida do depósito 0 e $B \geq \min\{a_i + s_i + t_{i, n+1}, \forall i \in N\}$ representa a possível hora mais tarde de chegada no depósito $n + 1$. Além disso, é associado um valor nulo à procura e ao tempo de serviço nos vértices correspondentes ao depósito, isto é, $q_0 = q_{n+1} = 0$ e $s_0 = s_{n+1} = 0$. O objetivo é o de minimizar o custo total de viagem, servindo os n clientes.

Começamos por apresentar um modelo que envolve dois tipos de variáveis: as variáveis binárias x_{ijk} , para todo $(i, j) \in A^*$ e $k \in K$, que assumem o valor 1 se o veículo k viaja de i para j e assumem o valor 0 em caso contrário, e as variáveis contínuas z_{ik} , para todo $i \in V^*$ e $k \in K$, que representam o tempo em que o veículo k começa o serviço no vértice i .

Descrevemos, de seguida, uma formulação para o PRVJT, que passamos a designar de **PRVJT1** e que pode também ser encontrada em [4, 5, 13].

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A^*} c_{ij} x_{ijk} \quad (3.1)$$

sujeito a :

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V^* \setminus \{i, 0\}} x_{jik} = 1, \quad \forall i \in N \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} \leq 1, \quad \forall k \in K \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} x_{ijk} = \sum_{i \in N \setminus \{j\}} x_{jik}, \quad \forall j \in N, \forall k \in K \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = \sum_{i \in N} x_{i(n+1)k}, \quad \forall k \in K \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in N} \left(q_i \sum_{j \in V^* \setminus \{j \neq i\}} x_{ijk} \right) \leq Q, \quad \forall k \in K \quad (3.6)$$

$$x_{ijk}(z_{ik} + s_i + t_{ij} - z_{jk}) \leq 0, \quad \forall k \in K, \forall (i, j) \in A^*, i \neq j \quad (3.7)$$

$$a_i \leq z_{ik} \leq b_i - s_i, \quad \forall k \in K, \forall i \in V^* \quad (3.8)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A^*, \forall k \in K \quad (3.9)$$

A função objetivo (3.1) expressa o custo total a ser minimizado. As restrições (3.2) asseguram que cada cliente i é servido exatamente uma vez e apenas por um veículo k . As restrições (3.3) a (3.5) garantem a continuidade do caminho a ser percorrido por cada veículo k , isto é, cada veículo sai do depósito, no máximo uma vez, visita um conjunto de clientes e por fim regressa ao depósito. As restrições (3.6) são restrições de capacidade e as restrições (3.7) e (3.8) asseguram a viabilidade das rotas no que diz respeito às restrições das janelas de tempo. As restrições (3.7) garantem que se o veículo k viaja de i para j então a hora em que inicia o serviço no vértice j é superior ou igual à soma da hora em que inicia o serviço em i e o tempo de serviço em i , mais o tempo de viagem de i para j . As restrições (3.8) limitam o valor das variáveis z_{ik} e asseguram que a hora de início de serviço num vértice é não inferior ao limite inferior da janela temporal e não superior à diferença entre o limite superior da janela temporal e o tempo de serviço no vértice. As sub-rotas que não incluem o depósito são eliminadas pelas restrições de janelas temporais, representadas por (3.7) e (3.8). As restrições (3.9) definem o domínio das variáveis de decisão x_{ijk} .

A formulação que acabamos de apresentar não é linear, por causa das restrições (3.7). Estas restrições podem, no entanto, ser linearizadas da seguinte forma [4]:

$$z_{jk} \geq z_{ik} + s_i + t_{ij} - (1 - x_{ijk})M_{ij}, \quad \forall k \in K, \quad \forall i, j \in V^* \quad (3.10)$$

onde M_{ij} é uma constante com valor muito elevado que pode, no entanto, ser calculada através da expressão $M_{ij} \geq \max\{0, b_i + s_i + t_{ij} - a_j\}$. Usando esta linearização podemos agora apresentar uma formulação em programação linear inteira mista, que designamos por **PRVJT2**, composta pelas expressões que se seguem [5, 13, 4].

$$\text{Minimizar } \sum_{k \in K} \sum_{j \in V^*} c_{ij} x_{ijk} \quad (3.1)$$

sujeito a :

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V^* \setminus \{i, 0\}} x_{jik} = 1, \quad \forall i \in N \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} \leq 1, \quad \forall k \in K \quad (3.3)$$

$$\sum_{i \in V^* \setminus \{j, 0\}} x_{jik} = \sum_{i \in V^* \setminus \{j, n+1\}} x_{ijk}, \quad \forall j \in N, \forall k \in K \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = \sum_{i \in N} x_{i(n+1)k}, \quad \forall k \in K \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in N} \left(q_i \sum_{j \in V^* | j \neq i} x_{ijk} \right) \leq Q, \quad \forall k \in K \quad (3.6)$$

$$z_{jk} \geq z_{ik} + s_i + t_{ij} - (1 - x_{ijk})M_{ij}, \quad \forall k \in K, \forall i, j \in V^* | j \neq i \quad (3.10)$$

$$a_i \leq z_{ik} \leq b_i - s_i, \quad \forall k \in K, \forall i \in V^* \quad (3.8)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A^*, \forall k \in K \quad (3.9)$$

Apenas as restrições (3.10) diferem das restrições da formulação **PRVJT1** e elas correspondem à linearização das restrições (3.7).

Notamos que para obter uma formulação para o PRVJT com veículos de capacidades diferentes basta substituírmos a capacidade Q por Q_k , para cada $k \in K$.

Notamos também que se for necessário usar todos os veículos da frota, basta substituir as restrições (3.3) pelas restrições

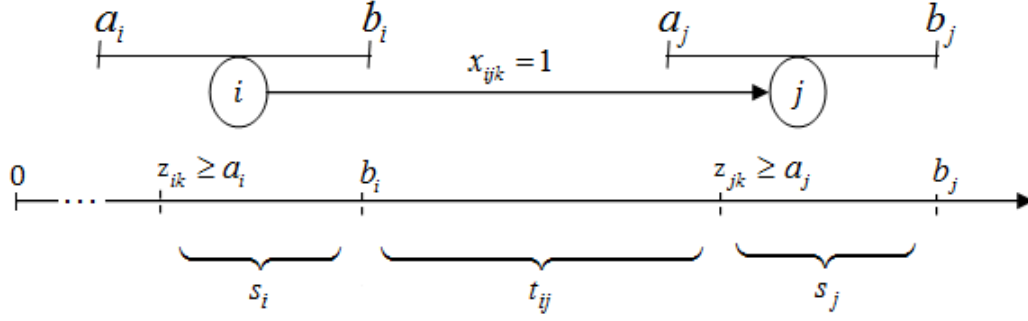
$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1, \forall k \in K \quad (3.11)$$

Para obtermos a relaxação linear basta substituir as restrições (3.9) pelas restrições

$$x_{ijk} \in [0, 1], \forall (i, j) \in A^*, \forall k \in K. \quad (3.12)$$

Podemos ilustrar as restrições das janelas temporais, representadas por (3.8) e (3.10), através da Figura 3.1. Nesta figura estão representados os vértices i e j bem como uma linha temporal orientada onde estão indicadas as janelas temporais $[a_i, b_i]$ e $[a_j, b_j]$ e estão representados os respectivos tempos de serviços s_i e s_j e o tempo de viagem t_{ij} de i para j . Estão também indicados os possíveis tempos de início de serviço, z_{ik} e z_{jk} , nos respectivos vértices.

Figura 3.1: Ilustração das restrições (3.8) e (3.10).



Observando a Figura 3.1, podemos verificar que, para que o veículo k viaje de i para j , $x_{ijk} = 1$, é necessário que a hora em que inicia o serviço no vértice j , z_{jk} , seja superior ou igual à soma da hora em que iniciou serviço no vértice i , z_{ik} , com o tempo de serviço s_i em i mais o tempo de viagem t_{ij} de i para j , isto é, $x_{ij} = 1 \Rightarrow z_{jk} \geq z_{ik} + s_i + t_{ij}$. Essa mesma hora z_{jk} deve ainda ser não inferior ao limite inferior do intervalo temporal correspondente ao vértice j , a_j , e não superior à diferença entre o limite superior b_j desse intervalo e o tempo de serviço s_j , isto é, $x_{ijk} = 1 \Rightarrow z_{jk} \in [a_j, b_j - s_j]$, para além da condição anterior ($z_{jk} \geq z_{ik} + s_i + t_{ij}$). Por outras palavras, quando um veículo k viaja de i para j , significa que inicia o serviço no cliente i no instante z_{ik} , atende-o durante um tempo s_i , demora o tempo t_{ij} na viagem de i para j onde inicia o serviço, não antes do momento a_i , e satisfaz o pedido durante o tempo s_j , sem poder permanecer no cliente j para além do momento b_j . Por exemplo: supomos dois clientes representados pelos vértices i e j em que $[a_i, b_i] = [1 : 00, 3 : 00]$, $[a_j, b_j] = [5 : 00, 8 : 00]$, $s_i = 1 : 20$, $s_j = 1 : 50$, $t_{ij} = 3 : 40$ e o veículo k viaja do cliente i para o cliente j . Neste caso, $z_{ik} \in [1 : 00, 3 : 00 - 1 : 20] = [1 : 00, 1 : 40]$, isto é, o veículo k deve iniciar o serviço no cliente i nunca antes do instante 1:00 nem depois do instante 1:40. $z_{jk} \geq z_{ik} + 1 : 20 + 3 : 40$ e $z_{jk} \in [5 : 00, 8 : 00 - 1 : 50] = [5 : 00, 6 : 10]$, isto é o veículo k deve iniciar o serviço no cliente j não antes do instante $(z_{ik} + 5 : 00)u.t$ nem depois do instante 6:10.

Da mesma forma que fizemos com as formulações apresentadas no capítulo anterior, passamos a determinar o número de variáveis e o número de restrições, em função do número n de clientes e do número m de veículos. O número de restrições fica definido pela expressão algébrica $n + m + nm + m + m + m(n + 2)(n + 1) + 2m(n + 2) + m(n + 2)(n + 1) = 2mn^2 + (9m + 1)n + 11m$, $\mathcal{O}(mn^2)$, e o número de variáveis pela expressão $m(n + 2)(n + 1) + m(n + 2) = m(n + 2)^2$, $\mathcal{O}(mn^2)$. Isto significa que as restrições e as variáveis desta formulação têm cardinalidade de ordem polinomial.

Assim como nas formulações anteriores, para termos uma ideia mais clara da variação do número de variáveis e do número de restrições desta formulação consideramos um exemplo com três veículos disponíveis e construímos, para esse exemplo, uma tabela onde registamos esses números, em função do número de clientes.

Números de variáveis e de restrições, com 3 veículos disponíveis.

Número de clientes	4	7	10	11	12	13	25
Número de variáveis	108	243	432	507	588	675	2187
Número de restrições	241	523	913	1067	1233	1411	4483

3.1.2 Formulação do PRVJT, usando variáveis x_{ij}

Vamos agora formular o problema usando variáveis binárias x_{ij} . Para isso consideramos o grafo orientado $G = (V, A)$, definido no capítulo anterior. A cada arco $(i, j) \in A$ para além de associarmos um custo c_{ij} , associamos também um tempo de viagem t_{ij} de i para j . Para cada cliente $i \in N$ associamos, para além da procura q_i , um tempo de serviço s_i e um intervalo temporal $[a_i, b_i]$. O objetivo é o de minimizar o custo total de viagem em que o atendimento a cada cliente decorre na janela temporal correspondente.

Para apresentarmos uma formulação para este problema consideramos três tipos de variáveis: as variáveis binárias x_{ij} , para todo $(i, j) \in A$, que assumem o valor 1 se o arco (i, j) faz parte da solução e assumem o valor 0 em caso contrário, as variáveis contínuas p_i que especificam o tempo de partida do cliente $i \in N$ e as variáveis contínuas y_i que representam a carga com que um veículo chega ao cliente $i \in N$.

De seguida descrevemos uma formulação em programação linear inteira mista, semelhante à encontrada em [8], que passamos a designar por **PRVJT3**.

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (3.13)$$

sujeito a :

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in N \quad (3.14)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ji}, \quad \forall i \in N \quad (3.15)$$

$$x_{ij} = 1 \Rightarrow p_j \geq p_i + t_{ij} + s_j, \quad \forall i, j \in N | j \neq i \quad (3.16)$$

$$a_i + s_i \leq p_i \leq b_i, \quad \forall i \in N \quad (3.17)$$

$$x_{ij} = 1 \Rightarrow y_j \geq y_i + q_i, \quad \forall i, j \in N | j \neq i \quad (3.18)$$

$$0 \leq y_i \leq Q - q_i, \quad \forall i \in N \quad (3.19)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.20)$$

A função objetivo (3.13) expressa o custo total a ser minimizado. As restrições (3.14) impõe que cada cliente seja atendido exatamente uma vez. As restrições (3.15) obrigam o veículo a deixar o cliente depois de o ter servido. As restrições (3.16) e (3.17) referem-se à viabilidade das janelas temporais. As restrições (3.16) asseguram que se um veículo viaja de i para j , então a soma da hora de partida em i com o tempo de viagem de i para j e o tempo de serviço prestado em j não ultrapassa o momento de partida do veículo no cliente j . As restrições (3.17) garantem que a hora a que o veículo parte de um cliente i seja não inferior ao limite superior b_i da janela temporal associado ao cliente e não inferior à soma do tempo de serviço s_i com o limite inferior a_i da referida janela temporal. As restrições (3.18) e (3.19) referem-se à limitação de capacidade. As restrições (3.18) impõem que se um veículo viaja do cliente i para o cliente j , $x_{ij} = 1$, então a carga com que chega ao cliente i , mais a procura do cliente i não ultrapassa a carga com que chega no cliente j . As restrições (3.19) garantem que a carga com que um veículo chegue a um cliente é não negativa e não ultrapassa a sua capacidade. As restrições (3.20) são restrições de integralidade das variáveis de decisão x_{ij} . As sub-rotas são eliminadas tanto pelas restrições das janelas temporais, (3.16) e (3.17), como pelas restrições (3.18) e (3.19).

A formulação **PRVJT3** tem um número de restrições com cardinalidade de ordem exponencial, devido à presença das restrições (3.16) e (3.18). Tais restrições podem, contudo, ser substituídas por famílias de restrições com cardinalidade de ordem polinomial, como se segue. Seja M uma constante de valor muito elevado, podemos escrever

$$p_j \geq p_i + t_{ij} + s_j - M(1 - x_{ij}), \quad \forall i, j \in N | i \neq j \quad (3.21)$$

$$y_j \geq y_i + q_i - Q(1 - x_{ij}), \quad \forall i, j \in N, i \neq j. \quad (3.22)$$

Com estas restrições obtemos uma nova formulação, em PLIM, que designamos por

PRVJT4.

$$\text{Minimizar } \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (3.13)$$

sujeito a :

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ji} = 1, \quad \forall i \in N \quad (3.14)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} = \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ji}, \quad \forall i \in N \quad (3.15)$$

$$p_j \geq p_i + t_{ij} + s_j - M(1 - x_{ij}), \quad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (3.21)$$

$$a_i + s_i \leq p_i \leq b_i, \quad \forall i \in N \quad (3.17)$$

$$y_j \geq y_i + q_i - Q(1 - x_{ij}), \quad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (3.22)$$

$$0 \leq y_i \leq Q - q_i, \quad \forall i \in N \quad (3.19)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (3.20)$$

Nesta formulação apenas as restrições (3.21) e (3.22) diferem da formulação **PRVJT3**.

As restrições (3.21) substituem (3.16) e garantem que um veículo só viaja do cliente i para o cliente j se consegue cumprir o tempo de partida p_i no cliente i , cumprir o tempo de viagem de t_{ij} , servir o cliente j no tempo de serviço s_j e deixá-lo no tempo $p_j \geq p_i + t_{ij} + s_j$. As restrições (3.22) substituem (3.18) e asseguram que se um veículo viaja de i para j , $x_{ij} = 1$, então a soma da procura q_i do cliente i com a carga y_i com que chega ao cliente i não ultrapassa a carga y_j com que chega ao cliente j .

Obtemos a relaxação linear do problema quando substituímos as restrições (3.20) pelas seguintes restrições

$$x_{ij} \in [0, 1], \forall (i, j) \in A. \quad (3.23)$$

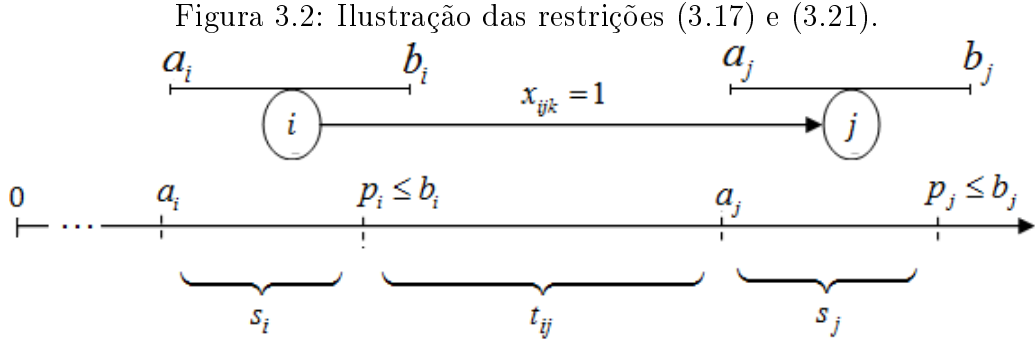
Quando pretendemos limitar o número de veículos na frota, adicionamos a restrição

$$\sum_{j \in N} x_{0j} \leq |K| \quad (3.24)$$

A restrição (3.24) assegura que o número de rotas não ultrapassa o número de veículos disponíveis na frota. Se consideramos esta restrição como igualdade ela impõe que o número de rotas seja igual ao número de veículos disponíveis.

Notamos que as formulações com variáveis binárias x_{ijk} permitem obter soluções para problemas com veículos de capacidades diferentes, quando a capacidade Q é substituída por Q_k , com $k \in K$. As formulações com variáveis binárias x_{ij} apenas permitem obter soluções para problemas com veículos de capacidades iguais.

Podemos ilustrar as restrições de janelas temporais com a Figura 3.2. Nesta figura estão representados os vértices i e j bem como uma linha temporal orientada onde estão indicadas as janelas temporais $[a_i, b_i]$ e $[a_j, b_j]$ e estão representados os respectivos tempos de serviços s_i e s_j e o tempo de viagem t_{ij} de i para j . Estão também indicados os respectivos tempos, p_i e p_j , em que o veículo deve deixar os clientes.



Em conformidade com a Figura 3.2, se um veículo viaja do cliente i para o cliente j , então sai do cliente i no instante $p_i \in [a_i + s_i, b_i]$. Este mesmo veículo sai do cliente j no instante $p_j \in [a_j + s_j, b_j]$. Este tempo de partida p_j no cliente j não é inferior à soma do tempo p_i em que o veículo sai de i com o tempo de viagem t_{ij} de i para j mais o tempo de serviço em j . Em outras palavras, se um veículo viaja do cliente i para o cliente j , $x_{ij} = 1$, então o veículo atende o cliente i no tempo s_i , sai para o cliente j no tempo p_i , gasta um tempo t_{ij} na viagem de i para j onde faz o serviço num tempo s_j e sai do cliente j num tempo p_j tal que $p_j \in [a_j + s_j, b_j]$ e $p_j \geq p_i + t_{ij} + s_j$.

De acordo com o número n de clientes, definimos o número total de restrições da presente formulação pela expressão algébrica $n + n + n(n-1) + 2n + n(n-1) + n + (n+1)n = 3n^2 + 3n$, $\mathcal{O}(n^2)$. Da mesma forma definimos o número total de variáveis pela expressão $(n+1)n + n + n = n^2 + 4n$, $\mathcal{O}(n^2)$. De seguida apresentamos uma tabela que espelha a variação do número de variáveis e do número de restrições desta formulação, em função do número de clientes.

Variáveis e restrições, de **PRVJT4**.

Clientes(n)	4	7	10	11	12	13	25
variáveis	28	70	130	154	180	208	700
Restrições	64	175	340	407	480	559	1975

Os números de variáveis e restrições da formulação **PRVJT2** são bastante superiores aos da formulação **PRVJT4**. Portanto, é de esperar que o custo computacional seja mais elevado quando usamos a formulação **PRVJT2** em vez de **PRVJT4**.

Tendo em conta a sua estrutura, apenas as formulações **PRVJT2** e **PRVJT4** serão usadas para obter os resultados computacionais. Notamos que existe uma diferença entre as formulações na forma como é considerado o tempo, em particular o momento de serviço nos clientes. Na formulação **PRVJT2** é considerado o tempo em que determinados veículos iniciam serviços nos clientes, enquanto na formulação **PRVJT4** é considerado o tempo em que os veículos deixam os clientes.

3.2 Exemplos de PRVJT

Nesta secção apresentamos soluções ótimas obtidos para 4 instâncias do PRVJT.

1. Exemplo 1

Supomos uma empresa com depósito na cidade do Porto (0) e quatro filiais nas cidades de Lisboa (1), Madrid (2), Paris (3) e Londres (4) e consideramos os dados indicados a seguir.

A Tabela 3.1 apresenta os dados do **Exemplo 1**. A primeira coluna, bem como as colunas 2 a 6 da primeira linha, representa as localidades i correspondentes ao depósito 0 e aos clientes 1, 2, 3 e 4. As colunas 2 a 4 apresentam o custo de viagem entre o cliente indicado na coluna e o cliente indicado em cada linha. A sétima coluna indica o pedido q_i de cada cliente. A oitava coluna indica o limite inferior da janela temporal de cada cliente. A nona coluna apresenta o limite superior da janela temporal associado a cada cliente. A décima coluna indica o tempo de serviço correspondente a cada cliente.

O tempo de viagem entre as localidades estão indicados na Tabela 3.2. Cada coluna apresenta o tempo de viagem entre a cidade correspondente ao número indicado na coluna e a cidade correspondente ao número indicado na linha.

A empresa dispõe de 3 veículos, cada um com capacidade $350u.p.$. Neste exemplo o tempo está expresso em horas (h). Por exemplo, 1,52h corresponde a 1 hora, 31 minutos e 12 segundos.

A solução desta instância está ilustrada pelas rotas indicadas nas Figuras 3.3 e 3.4, conforme a formulação usada. A Figura 3.3 representa a solução encon-

Tabela 3.1: Dados do Exemplo 1.

i	0	1	2	3	4	q_i	a_i	b_i	s_i
0	0	321	604	1766	2121	0	0,00	7,00	0,00
1	321	0	636	1815	2227	85	2,00	2,50	0,30
2	604	636	0	1249	1635	150	5,00	5,50	0,40
3	1736	1815	1249	0	366	200	4,00	4,50	0,50
4	2121	2227	1635	366	0	80	3,00	3,50	0,30

Tabela 3.2: Tempo de viagem entre as localidades.

i	0	1	2	3	4
0	0,00	0,75	0,53	1,52	1,65
1	0,75	0,00	1,00	2,50	2,33
2	0,53	1,00	0,00	1,32	1,58
3	1,52	2,50	1,32	0,00	0,43
4	1,65	2,33	1,58	0,43	0,00

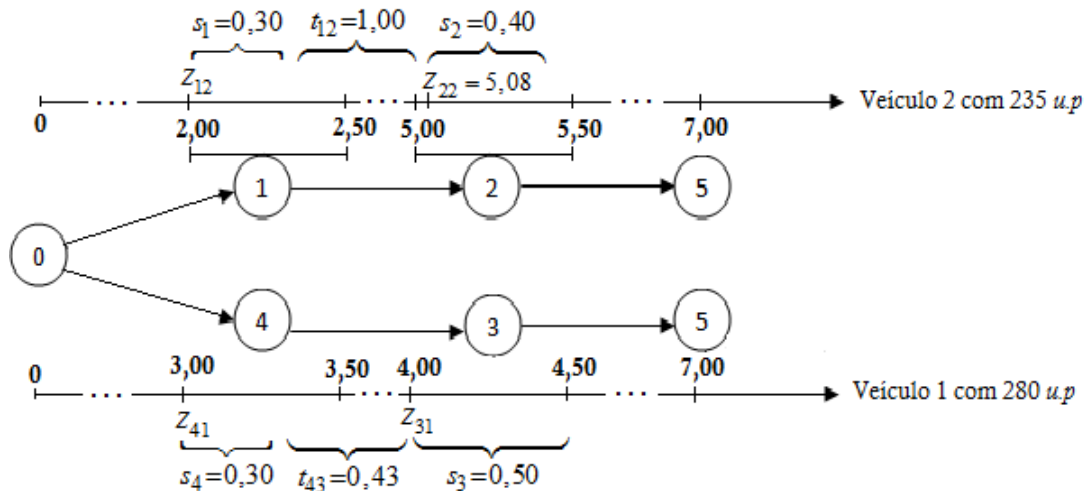
trada com o uso da formulação **PRVJT2**. Nesta figura, para além dos dados do problema, estão indicadas as linhas temporais que mostram como podem estar distribuídos os momentos de início de serviços nos clientes. Notamos que o depósito fictício $n+1$ é aqui o vértice 5. A Figura 3.4 representa a solução encontrada, usando a formulação **PRVJT4**. Nesta figura, para cada cliente, estão indicados o intervalo temporal e o instante de partida do veículo. Na Figura 3.5 estão as linhas temporais, referentes a cada rota, que indicam a forma como estão distribuídos os momentos em que os veículos deixam os clientes, usando a formulação **PRVJT4**.

Para descrever a solução do Exemplo 1, chamamos de *tempo de espera* num cliente, ao intervalo do tempo compreendido entre o tempo de chegada e o tempo de início de serviço no respetivo cliente. Consideramos que cada veículo sai do depósito às 00,00h.

Os resultados obtidos com a formulação **PRVJT2**, ilustrados com a Figura 3.3, são os seguintes.

O veículo 2 sai do Porto às 00,00h com 235u.p. e serve dois clientes, um em Lisboa e outro em Madrid, e regressa ao Porto onde chega às 6.01h.

Figura 3.3: Solução ótima, com custo 5784u.m., obtida com a formulação **PRVJT2**.



Serviço do veículo 2 em Lisboa (cliente 1):

tempo de viagem Porto–Lisboa: $0,75h$;
 hora de chegada: $h_{12} = (0,00h + 0,75h) = 0,75h$;
 tempo de espera: $1,25h \leftarrow (2,00h - 0,75h)$;
 hora início de serviço: $z_{12} = 2,00h \geq 0,75h$;
 duração do serviço: $0,30h$;
 quantidade de carga deixada: $85u.p.$;
 $2,00h \leq z_{12} \leq 2,20h \leftarrow (2,50h - 0,30h)$.

Serviço do veículo 2 em Madrid (cliente 2):

tempo de viagem Lisboa–Madrid: $1,00h$;
 hora de chegada: $h_{22} = 2,00h + 0,30h + 1,00h = 3,30h$;
 tempo de espera: $1,78h \leftarrow (5,08h - 3,30h)$;
 hora início de serviço: $z_{22} = 5,08h \geq 3,30h$;
 duração do serviço: $0,40h$;
 quantidade de carga deixada: $150u.p.$;
 $5,00h \leq z_{22} \leq 5,10h \leftarrow (5,50h - 0,40h)$.

O veículo 1 sai do Porto às 00,00h com 280u.p. e serve dois clientes, um em Londres e outro em Paris, e regressa ao Porto onde chega às 6.02h.

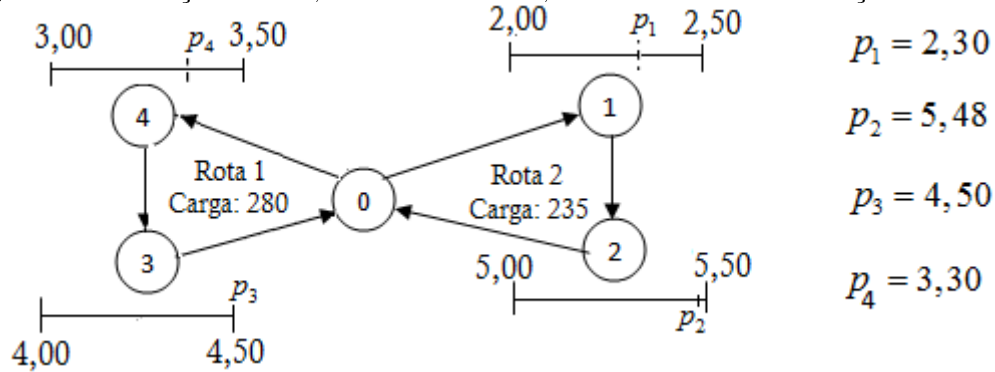
Serviço do veículo 1 em Londres (cliente 4):

tempo de viagem Porto–Londres: $1,65h$;
hora de chegada: $h_{41} = 0,00h + 1,65h = 1,65h$;
tempo de espera: $1,35h \leftarrow (3,00h - 1,65h)$;
hora início de serviço: $z_{41} = 3,00h \geq 1,65h$;
duração do serviço: $0,30h$;
quantidade de carga deixada: $80u.p.$;
 $3,00h \leq z_{41} \leq 3,20h \leftarrow (3,50h - 0,30h)$.

Serviço do veículo 1 em Paris (cliente 3):

tempo de viagem Londres–Paris: $0,43h$;
hora de chegada: $h_{31} = 3,00h + 0,30h + 0,43h = 3,73h$;
tempo de espera: $0,27h \leftarrow (4,00h - 3,73h)$;
hora início de serviço: $z_{31} = 4,00h \geq 3,73h$;
duração do serviço: $0,50h$;
quantidade de carga deixada: $200u.p.$;
 $4,00h \leq z_{31} \leq 4,00h \leftarrow (4,50h - 0,50h)$.

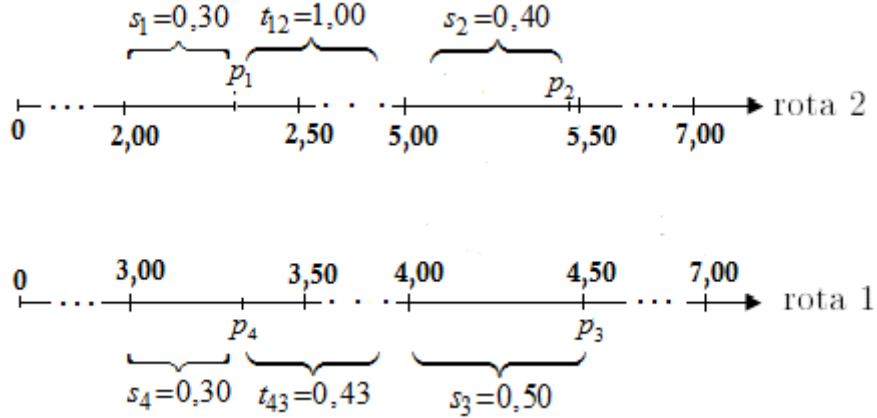
Figura 3.4: Solução ótima, com custo 5784, obtida com a formulação **PRVJT4**.



Os resultados obtidos com a formulação **PRVJT4**, ilustrados nas Figuras 3.4 e 3.5, são os seguintes.

O veículo que efetua a rota 2 sai do Porto às 00,00h com 235u.p. e serve dois clientes, um em Lisboa e outro em Madrid, e regressa ao Porto onde chega às 6.01h.

Figura 3.5: Linha temporal, usando formulação **PRVJT4**.



Serviço em Lisboa (cliente 1):

tempo de viagem Porto–Lisboa: $0,75h$;
hora de chegada: $h_1 = 0,00h + 0,75h = 0,75h$;
tempo de espera: $1,25h \leftarrow (2,30h - 0,30h - 0,75h)$;
duração do serviço: $0,30h$;
hora de partida: $p_1 = 2,30h \geq 1,05h \leftarrow (0,75h + 0,30h)$;
quantidade de carga deixada: $85u.p.$;
 $2,50h \geq p_1 \geq 2,30h \leftarrow (2,00h + 0,30h)$.

Serviço em Madrid (cliente 2):

tempo de viagem Lisboa–Madrid: $1,00h$;
hora de chegada: $h_2 = 2,30h + 1,00h = 3,30h$;
tempo de espera: $1,78h \leftarrow (5,48h - 0,40h - 3,30h)$;
duração do serviço: $0,40h$;
hora de partida: $p_2 = 5,48h \geq 3,70h \leftarrow (3,30h + 0,40h)$;
quantidade de carga deixada: $150u.p.$;
 $5,50h \geq p_2 \geq 5,40h \leftarrow (5,00h + 0,40h)$.

O veículo que efetua a rota 1 sai do Porto às 00,00h com 235u.p. e serve dois clientes, um em Londres e outro em Paris, e regressa ao Porto onde chega às 6.01h.

Serviço em Londres (cliente 4):

tempo de viagem Porto-Londres: $1,65h$;
hora de chegada: $h_4 = 0,00h + 1,65h = 1,65h$;
tempo de espera: $1,35h \leftarrow (3,30h - 0,30h - 1,65h)$;
duração do serviço: $0,30h$;
hora de partida: $p_4 = 3,30h \geq 1,95h \leftarrow (1,65h + 0,30h)$;
quantidade de carga deixada: $80u.p.$;
 $3,50h \geq p_4 \leq 3,30h \leftarrow (3,00h + 0,30h)$.

Serviço em Paris (cliente 3):

tempo de viagem Londre-Paris: $0,43h$;
hora de chegada: $h_3 = 3,30h + 0,43h = 3,73h$;
tempo de espera: $0,27h \leftarrow (4,50h - 0,50h - 3,73h)$;
duração do serviço: $0,30h$;
hora de partida: $p_3 = 4,50h \geq 4,23h \leftarrow (3,73h + 0,50h)$;
quantidade de carga deixada: $200u.p.$;
 $4,50h \geq p_3 \geq 4,50h \leftarrow (4,00h + 0,50h)$.

2. Exemplo 2

Neste exemplo procuramos determinar a solução ótima de uma das instâncias de referência disponíveis no site <http://w.cba.neu.edu/~msolomon/problems.htm>, instância R101. Esta instância, é composta por 100 clientes e um depósito. Dela conhecemos as coordenadas geográficas das localidades, as procuras dos clientes, as janelas temporais e o tempo de serviço em cada cliente. Consideramos que o tempo de viagem de uma localidade i para outra localidade j é igual à distância d_{ij} entre elas, isto é, fazemos $t_{ij} = d_{ij}$ e trabalhamos com valores aproximados às unidades. A capacidade de cada veículo é 200.

Para este exemplo obtivemos a solução ótima, com distância total 1880, percorrida pelas seguintes 27 rotas.

Rota1: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 41 \rightarrow 27 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 33.

Rota2: $1 \rightarrow 6 \rightarrow 17 \rightarrow 86 \rightarrow 38 \rightarrow 94 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 116.

Rota3: $1 \rightarrow 7 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 3

Rota4: $1 \rightarrow 13 \rightarrow 80 \rightarrow 4 \rightarrow 69 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 91.
Rota5: $1 \rightarrow 15 \rightarrow 39 \rightarrow 44 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 43.
Rota6: $1 \rightarrow 22 \rightarrow 74 \rightarrow 58 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 27.
Rota7: $1 \rightarrow 24 \rightarrow 42 \rightarrow 75 \rightarrow 59 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 60.
Rota8: $1 \rightarrow 28 \rightarrow 31 \rightarrow 21 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 56.
Rota9: $1 \rightarrow 29 \rightarrow 77 \rightarrow 55 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 47.
Rota10: $1 \rightarrow 30 \rightarrow 79 \rightarrow 35 \rightarrow 25 \rightarrow 81 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 35.
Rota11: $1 \rightarrow 32 \rightarrow 89 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 36.
Rota12: $1 \rightarrow 34 \rightarrow 82 \rightarrow 51 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 50.
Rota13: $1 \rightarrow 37 \rightarrow 65 \rightarrow 50 \rightarrow 49 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 80.
Rota14: $1 \rightarrow 40 \rightarrow 68 \rightarrow 56 \rightarrow 26 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 64.
Rota15: $1 \rightarrow 43 \rightarrow 16 \rightarrow 88 \rightarrow 98 \rightarrow 14 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 74.
Rota16: $1 \rightarrow 46 \rightarrow 83 \rightarrow 9 \rightarrow 47 \rightarrow 18 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 44.
Rota17: $1 \rightarrow 48 \rightarrow 20 \rightarrow 11 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 60.
Rota18: $1 \rightarrow 53 \rightarrow 19 \rightarrow 90 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 36.
Rota19: $1 \rightarrow 54 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 14.
Rota20: $1 \rightarrow 60 \rightarrow 96 \rightarrow 45 \rightarrow 87 \rightarrow 92 \rightarrow 101 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 119.
Rota21: $1 \rightarrow 63 \rightarrow 8 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 24.
Rota22: $1 \rightarrow 64 \rightarrow 12 \rightarrow 91 \rightarrow 33 \rightarrow 71 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 53.

Rota23: $1 \rightarrow 66 \rightarrow 72 \rightarrow 10 \rightarrow 36 \rightarrow 78 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 73.

Rota24: $1 \rightarrow 70 \rightarrow 52 \rightarrow 67 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 41.

Rota25: $1 \rightarrow 73 \rightarrow 76 \rightarrow 23 \rightarrow 57 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 86.

Rota26: $1 \rightarrow 84 \rightarrow 62 \rightarrow 85 \rightarrow 61 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 34.

Rota27: $1 \rightarrow 93 \rightarrow 99 \rightarrow 100 \rightarrow 95 \rightarrow 97 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 59.

Podemos observar que nesta solução foram utilizados vários veículos e a maioria transporta pouca carga, tendo em conta a sua capacidade. Na Rota 3, por exemplo, o veículo serviu somente o cliente 7, transportando apenas 3u.p.. Tentamos limitar o número de veículos, para ver se há possibilidade de o reduzir, mas verificamos que esta instância não têm solução admissível quando na frota são disponibilizados menos que 27 veículos.

3. Exemplo 3

Este exemplo difere do Exemplo 2 apenas na capacidade dos veículos. Consideramos cada veículo com capacidade 100 em vez de 200.

A solução ótima desta instância tem custo total 1881 e é constituída por 27 rotas distribuídas da seguinte forma.

Rota1: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 41 \rightarrow 27 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 33.

Rota2: $1 \rightarrow 6 \rightarrow 17 \rightarrow 86 \rightarrow 38 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 94

Rota3: $1 \rightarrow 13 \rightarrow 80 \rightarrow 4 \rightarrow 69 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 91.

Rota4: $1 \rightarrow 15 \rightarrow 39 \rightarrow 44 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 43.

Rota5: $1 \rightarrow 22 \rightarrow 74 \rightarrow 58 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 27.

Rota6: $1 \rightarrow 24 \rightarrow 42 \rightarrow 57 \rightarrow 5 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 59.

Rota7: $1 \rightarrow 28 \rightarrow 31 \rightarrow 21 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 56.
Rota8: $1 \rightarrow 29 \rightarrow 77 \rightarrow 55 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 47.
Rota9: $1 \rightarrow 30 \rightarrow 79 \rightarrow 35 \rightarrow 25 \rightarrow 81 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 35.
Rota10: $1 \rightarrow 32 \rightarrow 89 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 36.
Rota11: $1 \rightarrow 34 \rightarrow 82 \rightarrow 51 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 50.
Rota12: $1 \rightarrow 37 \rightarrow 65 \rightarrow 50 \rightarrow 49 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 80.
Rota13: $1 \rightarrow 40 \rightarrow 68 \rightarrow 56 \rightarrow 26 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 64.
Rota14: $1 \rightarrow 43 \rightarrow 16 \rightarrow 88 \rightarrow 98 \rightarrow 14 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 74.
Rota15: $1 \rightarrow 46 \rightarrow 83 \rightarrow 9 \rightarrow 47 \rightarrow 18 \rightarrow 94 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 66.
Rota16: $1 \rightarrow 48 \rightarrow 20 \rightarrow 11 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 60.
Rota17: $1 \rightarrow 53 \rightarrow 19 \rightarrow 90 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 36.
Rota18: $1 \rightarrow 54 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 14.
Rota19: $1 \rightarrow 60 \rightarrow 45 \rightarrow 87 \rightarrow 92 \rightarrow 101 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 99.
Rota20: $1 \rightarrow 63 \rightarrow 8 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 24.
Rota21: $1 \rightarrow 64 \rightarrow 12 \rightarrow 91 \rightarrow 33 \rightarrow 71 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 53.
Rota22: $1 \rightarrow 66 \rightarrow 72 \rightarrow 10 \rightarrow 36 \rightarrow 78 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 73.
Rota23: $1 \rightarrow 70 \rightarrow 52 \rightarrow 67 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 41.
Rota24: $1 \rightarrow 73 \rightarrow 76 \rightarrow 23 \rightarrow 75 \rightarrow 59 \rightarrow 1$
Quantidade entregue pela rota: 87.
Rota25: $1 \rightarrow 84 \rightarrow 62 \rightarrow 85 \rightarrow 61 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 34.

Rota26: $1 \rightarrow 93 \rightarrow 99 \rightarrow 100 \rightarrow 7 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 24.

Rota27: $1 \rightarrow 96 \rightarrow 95 \rightarrow 97 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 58.

Nestes exemplos a diminuição da capacidade dos veículos, de 200 para 100, provocou um aumento do custo total em uma unidade, mantendo o número de rotas. Fazemos variar a capacidade dos veículos entre 101 à 1000 e continuamos a obter a solução ótima com o mesmo valor 1880 e o mesmo número de rotas 27.

4. Exemplo 4

Neste exemplo consideramos a instância R101 do exemplo 2, mas reduzimos o tempo de viagem entre cada duas localidades. Consideramos $t_{ij} = 0,1d_{ij}$, $\forall(i, j) \in A^*$.

Esta instância tem solução ótima, com custo total 1631, obtida por 20 rotas com a seguinte distribuição.

Rota1: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 88 \rightarrow 98 \rightarrow 14 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 68.

Rota2: $1 \rightarrow 6 \rightarrow 62 \rightarrow 86 \rightarrow 38 \rightarrow 94 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 110.

Rota3: $1 \rightarrow 13 \rightarrow 80 \rightarrow 4 \rightarrow 69 \rightarrow 78 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 105.

Rota4: $1 \rightarrow 22 \rightarrow 74 \rightarrow 42 \rightarrow 75 \rightarrow 59 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 51.

Rota5: $1 \rightarrow 28 \rightarrow 70 \rightarrow 30 \rightarrow 79 \rightarrow 35 \rightarrow 55 \rightarrow 25 \rightarrow 81 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 75.

Rota6: $1 \rightarrow 29 \rightarrow 77 \rightarrow 82 \rightarrow 51 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 68.

Rota7: $1 \rightarrow 32 \rightarrow 31 \rightarrow 52 \rightarrow 21 \rightarrow 33 \rightarrow 71 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 95.

Rota8: $1 \rightarrow 34 \rightarrow 66 \rightarrow 72 \rightarrow 10 \rightarrow 67 \rightarrow 36 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 105.

Rota9: $1 \rightarrow 37 \rightarrow 65 \rightarrow 50 \rightarrow 49 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 80.

Rota10: $1 \rightarrow 40 \rightarrow 24 \rightarrow 68 \rightarrow 56 \rightarrow 26 \rightarrow 1$

Quantidade entregue pela rota: 93.
 Rota11: $1 \rightarrow 41 \rightarrow 27 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 26.
 Rota12: $1 \rightarrow 46 \rightarrow 48 \rightarrow 20 \rightarrow 91 \rightarrow 11 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 79.
 Rota13: $1 \rightarrow 53 \rightarrow 100 \rightarrow 95 \rightarrow 97 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 56.
 Rota14: $1 \rightarrow 54 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 14.
 Rota15: $1 \rightarrow 60 \rightarrow 15 \rightarrow 45 \rightarrow 39 \rightarrow 85 \rightarrow 61 \rightarrow 90 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 107.
 Rota16: $1 \rightarrow 64 \rightarrow 63 \rightarrow 89 \rightarrow 19 \rightarrow 7 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 53.
 Rota17: $1 \rightarrow 73 \rightarrow 76 \rightarrow 23 \rightarrow 57 \rightarrow 5 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 86.
 Rota18: $1 \rightarrow 84 \rightarrow 83 \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 47 \rightarrow 18 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 56.
 Rota19: $1 \rightarrow 93 \rightarrow 43 \rightarrow 16 \rightarrow 58 \rightarrow 44 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 29.
 Rota20: $1 \rightarrow 96 \rightarrow 99 \rightarrow 17 \rightarrow 87 \rightarrow 92 \rightarrow 101 \rightarrow 1$
 Quantidade entregue pela rota: 102.

Com a diminuição de tempo de viagem entre as cidades, houve redução tanto no custo de viagem como no número de veículos. O custo total passou de 1880 para 1631 e o número de rotas passou de 27 para 20. Para esta instância, verificamos que podemos obter uma solução ótima com 17 rotas e custo total 1669. Esta instância não possui solução admissível quando o número de veículos disponíveis é menor que 17.

3.3 Resultados Computacionais

Nesta secção mostramos os resultados computacionais obtidos para algumas instâncias do VRPTW, disponíveis no site <http://w.cba.neu.edu/~msolomon/problems.htm>. A essas instâncias passamos a chamar de Problemas de Solomon. Desses problemas escolhemos R101, R102, R104, R112, R201, R201, R204, R211, C101, C102, C104, C109, C201, C202, C204, C208, RC101, RC102, RC104, RC108, RC201, RC20, RC204 e C208 e fixamos 1800 segundos como o tempo computacional máximo, usando a mesma

máquina e o mesmo software que usamos para obter resultados computacionais das instâncias consideradas no PRV. Separamos essas instâncias em três grupos: grupo R, grupo C e grupo RC. Podemos ainda dividir o grupo R em R1 (composto por R101, R102, R104, R112) e R2 (composto por R201, R201, R204 e R211), o grupo C em C1 (formado por C101, C102, C104 e C109) e C2 (formado for C201, C202, C204, C208) e o grupo RC em RC1 (composto por RC101, RC102, RC104 e RC108) e RC2 (formado por RC201, RC20, RC204 e C208). Cada uma das instâncias é composta por 1 depósito, 100 clientes e um número ilimitado de veículos com a mesma capacidade. De cada cliente conhecemos as coordenadas geográficas, a procura, a janela temporal e o tempo de serviço.

No grupo R todos os clientes estão associados a um tempo de serviço igual a 10. Cada um dos veículos disponíveis no grupo R1 tem capacidade 200 u.p e cada um dos veículos disponíveis no grupo R2 têm capacidade 1000 u.p. A diferença entre as instâncias do grupo R está centrada nas janelas temporais associadas aos clientes. A janela temporal associada a cada cliente da instância R101 tem amplitude igual ao tempo de serviço correspondente. Em R102 há 25% dos clientes com amplitude da janela temporal superior ao tempo de serviço e 75% dos clientes com amplitude da janela temporal igual ao tempo de serviço. Em R104 apenas 25% dos clientes têm amplitude da janela temporal igual ao tempo de serviço. Nas outras instâncias do grupo R cada cliente tem janela temporal com amplitude superior ao tempo de serviço.

Na Tabela 3.3 registamos algumas informações relativas à amplitude das janelas temporais das instâncias do grupo R. Na primeira coluna estão os nomes das instâncias. A segunda, a terceira e a quarta coluna mostra, respetivamente, o valor mínimo, a média aritmética e o valor máximo, das amplitudes das janelas temporais correspondentes aos clientes de cada instância.

No grupo C todos os clientes estão associados a um tempo de serviço igual a 90. Cada um dos veículos disponíveis em C1 tem capacidade 200 e cada um dos veículos disponíveis em C2 tem capacidade 700. Os clientes do grupo C1 têm as mesmas coordenadas geográficas e as mesmas procuras, assim como acontece no grupo C2. Há alguns clientes do grupo C1 com as mesmas coordenadas geográficas que uns clientes do grupo C2. Os clientes do grupo C101 têm janelas temporais com amplitudes inferiores ao respetivo tempo de serviço. Na instância C102 há 75% dos clientes com amplitude da janela temporal inferior ao tempo de serviço. Em C104 há 25% dos clientes com amplitude da janela temporal inferior ao tempo de serviço. Nas outras instâncias do grupo C todos os clientes têm janela temporal com amplitude superior ao tempo de

Tabela 3.3: Janelas temporais do Grupo R.

Instância	Amplitude das janelas temporais		
	Mínimo	Média	Máximo
R101	10	10	10
R102	10	57,39	208
R104	10	148,3	215
R112	73	117,6	166
R201	27	116	212
R202	27	328,8	978
R204	27	751,3	985
R211	293	471,9	664

serviço.

Na Tabela 3.4 indicamos algumas informações sobre a amplitude das janelas temporais das instâncias do grupo C.

Tabela 3.4: Janelas temporais do Grupo C.

Instância	Amplitude das janelas temporais		
	Mínimo	Média	Máximo
C101	37	60,76	89
C102	43	325,7	1135
C104	43	852,9	1136
C109	360	360	360
C201	160	160	160
C202	160	937,7	3289
C204	160	2493	3291
C209	640	640	640

Podemos observar que no grupo C1 há clientes em que o tempo de serviço é superior à amplitude da janela temporal. Este fato faz com que algumas instâncias não tenham soluções admissíveis perante as formulações apresentadas no presente trabalho. *Balseiro et al. (2011)* [1] também referem que alguns dos problemas de Solomon não têm solução admissível, quando considerados os dados originais. Para viabilizar a existência de soluções admissíveis destas instâncias, substituímos o tempo de serviço de cada cliente nesta situação pela amplitude da janela temporal correspondente.

No grupo RC todos os clientes estão associados a um tempo de serviço igual a 10. Cada um dos veículos disponíveis em RC1 tem capacidade 200 e cada um dos veículos disponíveis em RC2 tem capacidade 1000. A janela temporal associada a cada cliente da instância RC101 tem amplitude igual a 30. Nas outras instâncias a amplitude da janela temporal varia com o cliente.

Na Tabela 3.5 mostramos algumas informações sobre amplitude das janelas temporais das instâncias do grupo RC.

Tabela 3.5: Janelas temporais do Grupo RC.

Instância	Amplitude das janelas temporais		
	Mínimo	Média	Máximo
RC101	30	30	30
RC102	30	71,46	217
RC104	30	154,8	225
RC108	27	112,3	180
RC201	120	120	120
RC202	120	319	937
RV204	120	717	945
RV208	293	471,8	664

Subdividimos cada uma das instâncias escolhidas em quatro instâncias formadas pelos primeiros 25, 50, 75 e 100 clientes, respetivamente, e disponibilizamos 10 veículos para as instâncias com 25 clientes e 20 veículos para as outras instâncias. Consideramos o tempo de viagem entre as localidades como a distância correspondente e usamos as formulações **PRVJT2** e **PRVJT4** para obter resultados computacionais de todas as instâncias. Trabalhamos com distâncias aproximadas às unidades.

As Tabelas 3.6, 3.7 e 3.8 apresentam, os resultados computacionais das instâncias do grupo R, do grupo C e do grupo RC, respetivamente. A primeira coluna indica o nome da instância original escolhida para formar novas instâncias. A segunda coluna indica o número de clientes que fazem parte da nova instância. A terceira e a quarta coluna apresentam, respetivamente, o valor e o tempo da relaxação linear, obtidos com a formulação **PRVJT2**. As três colunas seguintes fornecem o número de rotas, o valor e o

tempo da solução admissível, obtidos com a formulação **PRVJT2**. O próximo grupo de colunas apresenta os resultados obtidos com a formulação **PRVJT4**. Nestes resultados o tempo está expresso em segundos. Os números a negrito correspondem aos valores ótimos confirmados. Na análise dos resultados utilizamos uma notação composta por dois componentes separados por ponto. A primeira componente corresponde ao nome da instância original usada para formar nova instância e a segunda componente corresponde ao número de clientes da nova instância. Por exemplo, quando escrevemos R101.25 queremos representar uma instância com 25 clientes, obtida da original R101, isto é, referimos ao nome da instância cujos resultados se encontram na quarta linha da Tabela 3.6.

De acordo com os resultados computacionais das instâncias do grupo R, registados na Tabela 3.6, podemos constatar o seguinte.

- O uso da formulação **PRVJT4** permitiu obter soluções admissíveis para todas as instâncias do grupo, enquanto que usando a formulação **PRVJT2** só foi possível obter soluções admissíveis para cerca de 34% dessas instâncias, tendo em conta o tempo computacional estipulado, 1800 segundos.
- A formulação **PRVJT2** não permitiu obter uma solução admissível para nenhuma instância com 100 clientes (instância original);
- Com o uso da formulação **PRVJT4** obtivemos soluções ótimas para 10 instâncias, incluindo duas originais, enquanto que com o uso da formulação **PRVJT2** só foram obtidos soluções ótimas para 3 instâncias, sendo duas com 25 clientes e uma com 50 clientes.
- A formulação **PRVJT4** apresenta maior número de soluções ótimas e melhores valores de relaxação linear.
- As observações constantes nos itens anteriores permitem concluir que a formulação **PRVJT4** é mais eficiente de que a formulação **PRVJT2**, no sentido em que obtém melhores valores em menos tempo.
- Os clientes das instâncias obtidas de R101 estão associados às janelas temporais com amplitude igual ao tempo de serviço. O uso da formulação **PRVJT4** permitiu encontrar soluções ótimas para todas essas instâncias em tempo computacional muito reduzido. No entanto, o número de rotas da solução ótima de cada uma

Tabela 3.6: Resultados computacionais das instâncias do grupo R.

		Formulação PRVJT2					Formulação PRVJT4				
		Relax. Linear		Solução Admissível			Relax. Linear		Solução Admissível		
Prob	n	Val.	Tempo	Rt	Val.	Tempo	Val.	Tempo	Rt	Val.	Tempo
R101	25	276	0,135	11*	738	0,213	278,82	0,016	11	738	0,015
	50	403	1,524	15	1197	2,895	408,1	0,062	15	1197	0,047
	75	519	4,244	*		1799,32	524,3	0,188	22	1661	0,078
	100	571	8,079	*		1799,25	576,6	0,39	27	1880	0,156
R102	25	276	0,152	8	601	1799,89	278,82	0,031	8	601	3,463
	50	403	2,521			1799,51	408,1	0,094	14	1062	1799,49
	75	519	7,652			1799,54	524,3	0,234	21	1517	1799,07
	100	571	14,603			1799,87	576,6	0,686	24	1742	1799,57
R104	25	276	0,199	5	459	1799,09	278,82	0,016	5	435	1799,31
	50	403	3,62			1800,01	408,1	0,281	8	804	1799,9
	75	519	10,965			1799,13	524,3	0,608	12	1162	1799,84
	100	571	23,799			1799,59	576,6	1,482	17	1393	1799,97
R112	25	276	0,218	5	524	1799,61	278,82	0,048	4	410	1799
	50	403	4,006			1799,55	408,1	0,111	10	835	1799,78
	75	519	12,229			1799,95	524,3	0,327	13	1234	1799,16
	100	571	29,734			1799,47	576,6	0,936	17	1371	1800
R201	25	276	0,153	4	474	13,615	276,72	0,048	4	474	0,12
	50	403	3,853	6	836	1799,73	404,38	0,159	7	801	4,888
	75	519	12,097			1799,81	520,72	0,294	7	1023	176,192
	100	571	24,688			1799,32	572,62	0,647	8	1175	1497,76
R202	25	276	0,299	4	426	1799,17	276,56	0,025	4	424	20,854
	50	403	5,721	7	924	1799,41	404,33	0,104	5	720	1799,31
	75	519	16,511			1799,86	520,47	0,29	7	960	1799,11
	100	571	24,818			1799,72	572,5	0,666	9	1238	1799,77
R204	25	276	0,219	4	394	1799,8	276,56	0,118	2	355	1799,18
	50	403	4,008			1799,28	404,02	0,22	3	573	1799,95
	75	519	11,704			1799,21	520,07	0,659	6	798	1799,95
	100	571	24,331			1799,74	572,13	1,126	15	1161	1799,39
R211	25	276	0,284	2	406	1799,87	276,56	0,028	2	351	1799,41
	50	403	3,944			1799,26	404,02	0,147	4	637	1799,21
	75	519	11,642			1799,2	520,06	0,322	7	1004	1799,08
	100	571	25,741			1799,39	572,12	0,92	11	1249	1799,46

* Houve necessidade de aumentar o número de veículos, inicialmente disponibilizados.

destas instâncias é superior ao número de rotas das soluções admissíveis das instâncias correspondentes. Consideramos que duas instâncias são correspondentes quando têm o mesmo número de clientes e apenas janelas temporais diferentes.

- Quando aumentamos as amplitudes das janelas temporais, deixamos de ser capazes de obter solução ótima no tempo prefixado, a não ser para a instância R101.25. Para exemplificar este facto, podemos comparar os resultados de R101 com os do mesmo grupo, R1. Lembremos que as janelas temporais dos clientes das instâncias obtidas a partir de R102, R104 ou R112 são ampliações das janelas temporais dos clientes das instâncias obtidas a partir de R101;
- A solução admissível de qualquer problema do grupo R1, grupo em que as janelas temporais são mais apertadas que as do R2, apresenta o número de veículos mais elevado que o número dos veículos utilizados na solução do problema, correspondente do grupo R2. A média aritmética de números dos veículos utilizados nas soluções admissíveis das instâncias do grupo R1 é 14,25, enquanto nas soluções do grupo R2 a média aritmética de número dos veículos utilizados é de 6,31.

Tendo em conta os resultados computacionais presentes na Tabela 3.7 podemos verificar o seguinte.

- Para as instâncias do grupo C foi obtido um maior número de soluções ótimas e maior número de soluções admissíveis que os obtidos no grupo R, usando ambas as formulações.
- Em geral, o número de veículos utilizados nas soluções admissíveis das instâncias do grupo C é menor que o número de veículos utilizados nas soluções admissíveis das instâncias do grupo R. O número de veículos utilizado nas soluções das instâncias do grupo C2 é menor que o número de veículos utilizado nas soluções das instâncias do grupo C1.
- Com a formulação **PRVJT4** foram obtidas soluções admissíveis para todas as 32 instâncias, dentre as quais 20 são reconhecidas como ótimas.
- Com a formulação **PRVJT2** não foi possível obter soluções admissíveis para 12 instâncias do grupo C, tendo em conta o tempo definido inicialmente. Das soluções admissíveis encontradas, apenas 9 foram reconhecidas como ótimas. Entre elas estão duas instâncias originais.

Tabela 3.7: Resultados computacionais das instâncias do grupo C.

		Formulação PRVJT2					Formulação PRVJT4				
		Relax. Linear		Solução Admissível			Relax. Linear		Solução Admissível		
Prob	n	Val.	Tempo	Rt	Val.	Tempo	Val.	Tempo	Rt	Val.	Tempo
C101	25	69	0,055	5	242	0,133	70,7	0,02	5	242	0,017
	50	145	1,216	9	508	2,506	147,4	0,06	9	508	0,07
	75	224	2,964	12	794	5,367	227,48	0,18	12	794	0,21
	100	309	6,583	17	1128	10,967	314,68	0,415	17	1128	0,798
C102	25	69	0,335	3	206	1799,76	70,7	0,017	3	206	4,87
	50	145	2,387	8	497	1799,56	147,4	0,065	7	472	48,593
	75	224	5,445	11	933	1799,6	227,48	0,203	11	766	515,3
	100	309	12,605			1799,19	314,68	0,374	15	1069	1799,58
C104	25	69	0,182	3	195	1799,24	70,7	0,015	3	193	1799,92
	50	145	3,448			1799,49	147,4	0,062	5	369	1799,12
	75	224	9,033			1800,97	227,48	0,187	10	879	1799,06
	100	309	20,842			1799,89	314,68	0,406	18	1338	1799,65
C109	25	69	0,205	3	192	1799,81	70,7	0,016	3	192	7,535
	50	145	3,791			1799,14	147,4	0,171	5	365	111,619
	75	224	8,05			1799,31	227,48	0,172	9	735	1799,48
	100	309	16,739			1799,41	314,68	0,452	13	1071	1799,79
C201	25	142	0,156	3	236	0,109	142,6	0,016	3	236	0,016
	50	257	2,665	3	374	4,139	257,63	0,078	3	374	0,171
	75	334	6,432	5	552	14,92	335,16	0,187	5	552	0,234
	100	471	14,472	6	668	47,815	472,6	0,514	6	668	0,39
C202	25	142	0,188	2	225	1209,2	142,6	0,015	2	225	1,513
	50	257	2,808	4	383	1799,17	257,63	0,063	3	369	14,976
	75	334	8,077	4	566	1799,3	335,16	0,203	4	541	4,633
	100	471	20,404			1800,81	472,6	0,483	5	660	53,792
C204	25	142	0,187	2	250	1799,92	142,6	0,031	1	217	1039,25
	50	257	5,606	5	549	1799,49	257,63	0,063	2	423	1799,96
	75	334	11,836			1799,55	335,16	0,39	4	748	1799,65
	100	471	24,494			1799,65	472,6	0,874	8	1051	1799,42
R208	25	142	0,172	2	218	1799,69	142,6	0,015	2	217	3,822
	50	257	3,382	4	492	1799,15	257,63	0,063	2	352	11,294
	75	334	10,142			1799,47	335,16	0,187	3	510	165,236
	100	471	71,468			1799,29	472,6	0,39	3	600	1799,54

- Os casos em que são obtidas as soluções ótimas, requerem menos tempo computacional usando a formulação **PRVJT4** em vez de **PRVJT2**.
- O valor da relaxação linear obtido com a formulação **PRVJT4** é melhor que o valor da relaxação linear obtido com a formulação **PRVJT2**, para cada instância.
- O tempo usado para obter o valor da relaxação linear de cada instância, usando a formulação **PRVJT4**, é menor que o tempo usado quando é usada a formulação **PRVJT2**.
- Finalmente podemos concluir que a formulação **PRVJT4** é mais vantajosa que a formulação **PRVJT2**, quer em termos de qualidade da solução obtida, quer em termos do tempo computacional usado para a sua solução.

Os valores presentes na Tabela 3.8 permitem-nos observar o seguinte.

- À semelhança dos casos anteriores, a formulação **PRVJT4** continua a fornecer soluções admissíveis para um maior número de instâncias, neste caso para todas as instâncias, e a formulação **PRVJT2** continua a não apresentar soluções admissíveis para algumas instâncias.
- Neste grupo, utilizando a formulação **PRVJT2**, não foram encontradas soluções ótimas para nenhuma instância original, respeitando o tempo limite.
- Relativamente ao tempo e ao valor da solução admissível podemos tirar as mesmas conclusões que tirámos com os resultados das duas tabelas anteriores, comparando as duas formulações.

Os valores presentes nas Tabelas 3.6, 3.7 e 3.8 permitem-nos observar o seguinte.

- O uso da formulação **PRVJT4** permitiu determinar uma solução admissível, no tempo prefixado, para cada uma das 96 instâncias, enquanto que com o uso da formulação **PRVJT2** o mesmo tempo, 1800 segundos, não foi suficiente para determinar solução ótima para a maioria dessas instâncias, aproximadamente 53%.
- A formulação **PRVJT4** é melhor que a formulação **PRVJT2**, no sentido em que fornece melhor valor da relaxação linear, maior número de soluções admissíveis, maior número de soluções ótimas e requer menor tempo computacional.

Tabela 3.8: Resultados computacionais das instâncias do grupo RC.

		Formulação PRVJT2					Formulação PRVJT4				
		Relax. Linear		Solução Admissível			Relax. Linear		Solução Admissível		
Prob	n	Val.	Tempo	Rt	Val.	Tempo	Val.	Tempo	Rt	Val.	Tempo
RC101	25	92	0,186	5	526	1421,45	93,4	0,047	5	526	0,187
	50	180	3,528	10	1005	1799,97	183,3	0,156	9	987	2,793
	75	399	9,45	16	1541	1799,72	408,2	0,312	15	1475	5,445
	100	524	22,54	20	2188	1800,03	533,5	0,671	18	1774	22,776
RC102	25	92	0,255	4	409	1799,75	93,4	0,046	4	409	10,842
	50	180	4,292	12	1163	1799,7	183,3	0,125	8	891	1799,9
	75	399	10,266			1799,61	408,2	0,297	13	1408	1799,4
	100	524	23,792			1799,68	533,5	0,733	18	1759	1799,4
RC104	25	92	0,321	3	302	1799,59	93,4	0,016	3	300	1799
	50	180	4,243		830	1799,73	183,3	0,093	5	635	1799,1
	75	399	11,622			1799,51	408,2	0,328	11	1275	1799,9
	100	524	25,318			1807,6	533,5	0,733	13	1564	1799,6
RC108	25	92	0,193	3	326	1799,37	93,4	0,031	3	297	1799,4
	50	180	3,76	8		1799,56	183,3	0,094	8	854	1799,1
	75	399	10,39			1799,68	408,2	0,312	12	1208	1799,9
	100	524	27,939			1799,78	533,5	0,78	18	1672	1799,5
RC201	25	92	0,265	3	358	150,469	92,28	0,015	3	358	0,281
	50	180	3,089	10	1553	1799,73	180,7	0,093	5	686	6,568
	75	399	7,394			1799,96	401,4	0,265	7	1070	94,38
	100	524	16,723			1799,39	526	0,78	8	1279	1799,9
RC202	25	92	0,172	3	336	1799,19	92,28	0,015	3	336	1799,1
	50	180	2,979			1799,11	180,7	0,109	5	643	1799,2
	75	399	7,722			1799,5	401,2	0,28	7	1062	1799,2
	100	524	19,266			1799,63	526	0,655	11	1293	1799,8
RC204	25	92	0,309	3	318	1799,21	92,28	0,015	3	316	1799
	50	180	3,557			1799,96	180,7	0,109	3	506	1799,2
	75	399	9,001			1799,38	400,8	0,265	6	1033	1799,1
	100	524	22,638			1799,17	525,9	0,765	6	1436	1799,5
RC208	25	92	0,247	2	296	1799,75	92,28	0,016	2	291	1799,1
	50	180	3,214			1799,39	180,7	0,094	5	553	1799,9
	75	399	8,908			1799,31	400,8	0,265	7	1144	1799,9
	100	524	23,775			1799,19	525,9	0,874	9	1416	1799,4

- O aumento da flexibilidade das janelas temporais contribuiu para aumentar o tempo computacional e, geralmente, diminuir o valor da solução.

Vamos agora utilizar apenas a formulação **PRVJT4** para resolver algumas instâncias. O objetivo é o de comparar os resultados computacionais, tendo em conta a capacidade dos veículos, as janelas temporais e o número de clientes. Tais resultados ficam registados nas Tabelas 3.9 e 3.10. A Tabela 3.9 apresenta resultados computacionais de instâncias formadas por 50 clientes, e a tabela 3.10 indica os resultados computacionais de instâncias formadas por 100 clientes. A primeira coluna indica o nome da instância composta por três componentes separadas por pontos. A primeira componente corresponde ao nome da instância original usada para formar novas instâncias. A segunda componente corresponde ao número de clientes da nova instância e a terceira componente corresponde à capacidade de cada veículo disponível na nova instância. A segunda coluna indica a capacidade de cada veículo numa frota. A terceira e a quarta coluna indicam, respetivamente, o valor e o tempo da relaxação linear. Nas três colunas seguintes estão indicados o número de rotas, o valor e o tempo da solução admissível. Os números a negrito correspondem aos valores ótimos confirmados.

Observando a Tabela 3.9, podemos verificar o seguinte.

- A redução da capacidade dos veículos em cada instância provoca um aumento no valor da relaxação linear.
- Nas instâncias *R101.50.Q*, *C101.50.Q*, *C201.50.Q* e *RC101.50.Q*, o aumento da capacidade Q dos veículos contribui para a diminuição do tempo computacional, a redução do valor da solução admissível e diminuição do número de veículos. Tivemos a curiosidade de verificar a razão pela qual o aumento da capacidade Q não influenciou nos valores das soluções admissíveis das restantes instâncias, *R201.50.Q* e *RC201.50.Q*, e verificamos que, nas soluções dessas instâncias, em qualquer uma das rotas a capacidade usado do veículo é inferior a 250, pelo que qualquer aumento desse valor não vai alterar o valor da solução, tendo em conta que qualquer veículo disponível nestas instâncias tem capacidade não inferior a 250.

Os resultados da Tabela 3.10 permitem concluir o seguinte.

- O aumento da flexibilidade nas janelas temporais contribuiu para diminuir o valor da solução ótima e aumentar o tempo computacional. Para o verificar

Tabela 3.9: Resultados computacionais de instâncias com 50 clientes, variando Q.

Problema	Relaxação linear		Solução admissível		
	Valor	Tempo	Rotas	Valor	Tempo
R101.50.200	408,095	0,062	15	1197	0,047
R101.50.100	413,19	0,093	15	1198	0,094
R101.50.50	423,89	0,124	17	1306	8,003
R201.50.1000	404,38	0,159	7	801	4,888
R201.50.500	405,195	0,109	7	801	3,869
R201.50.250	407,076	0,109	7	801	3,869
C101.50.200	147,4	0,06	9	508	0,07
C101.50.100	149,8	0,062	10	611	748,989
C101.50.50	157,8	0,062	18	1043	1799,17
C201.50.700	257,629	0,078	3	374	0,171
C201.50.300	258,516	0,078	4	423	13,494
C201.50.100	261,5	0,14	9	758	1799,31
RC101.50.200	147,4	0,06	9	508	0,07
RC101.50.100	186,6	0,094	10	1019	21,309
RC101.50.50	196,8	0,187	20	1743	1799,9
RC201.50.1000	180,71	0,093	5	686	6,568
RC201.50.500	181,32	0,109	5	686	5,694
RC201.50.250	182,64	0,109	5	686	4,462

comparemos os resultados de R101.100.200 com os resultados de R201.100.200 ou ainda os resultados de RC101.100.200 com os de RC201.100.200. Convém recordar que R201 corresponde à ampliação de R101 e que RC201 corresponde à ampliação de RC101, em termos das amplitudes das janelas temporais (ver Tabelas 3.3 e 3.5).

- A redução da capacidade dos veículos provoca um aumento do tempo computacional necessário para a obtenção da solução ótima.

Em ambos os casos (as duas tabelas) o aumento das amplitudes das janelas temporais faz aumentar o tempo computacional e diminuir o valor da solução ótima (ver os resultados de RC101.100.200 e RC201.100.200 a título de exemplo). A redução da capacidade dos veículos faz aumentar o valor da relaxação linear, aumentar o valor da solução admissível em quase todas as instâncias e aumentar o tempo computacional

Tabela 3.10: Resultados computacionais de instâncias com 100 clientes, variando Q.

Problema	Relaxação linear		Solução admissível		
	Valor	Tempo	Rotas	Valor	Tempo
R101.100.200	576,597	0,39	27	1880	0,156
R101.100.100	582,195	0,593	27	1881	0,827
R101.100.80	584,994	0,523	27	1885	6,72
R201.100.1000	572,624	0,647	8	1175	1497,76
R201.100.350	574,244	0,742	8	1175	1679,21
R201.100.200	576,597	0,825	9	1196	1799,31
C101.100.200	314,675	0,415	17	1128	0,798
C101.100.100	320,35	0,343	21	1571	1799,44
C101.100.80	323,188	0,406	24	1960	1799,75
C201.100.700	472,603	0,514	6	668	0,39
C201.100.350	474,341	1,156	6	717	149,991
C201.100.200	476,719	0,742	10	1050	1799,11
RC101.100.200	533,45	0,671	18	1774	22,776
RC101.100.100	542,9	0,795	21	1964	1799,34
RC101.100.80	547,625	0,811	27	2413	1799,74
RC201.100.1000	526,012	0,78	8	1279	1799,9
RC201.100.350	529,4	0,686	9	1278	1799,7
RC201.100.200	533,45	0,826	12	1515	1799,59

na maioria dos casos (ver os resultados do grupo C201.100.Q como exemplo). Quanto menor for o número de clientes, menores são o tempo computacional e o valor da solução ótima (por exemplo, ver os resultados de R101.50.200 e C101.100.200).

Capítulo 4

Conclusão

O problema de roteamento de veículos, bem como as suas variantes, tem merecido grande atenção na área da otimização combinatória e investigação operacional. A sua resolução por abordagens puramente exatas é, em muitos casos, computacionalmente impraticável, pois levaria muito tempo [13]. Por esse motivo são propostas diversas formulações e desenvolvidos vários algoritmos quer exatos quer heurísticos com o objetivo de ser determinada uma melhor solução em tempo útil.

Neste trabalho, propomos formulações para o Problema de Roteamento de Veículos (PRV), sem restrições de tempo e com veículos capacitados, e formulações para o Problema de Roteamento de Veículos com Janelas Temporais (PRVJT). No PRV, usamos duas famílias de restrições para a eliminação das sub-rotas: uma família proposta por *Miller, Tucker e Zemlin*, para o problema de caixeiro viajante, e outra família baseada no uso de fluxos. No PRVJT as restrições de eliminação de sub-rotas são também assumidas pelas restrições das janelas temporais. Para cada um dos problemas, distinguimos dois grupos de formulações: um grupo em que para cada rota reconhecemos, de imediato, o veículo associado, usando variáveis binárias x_{ijk} como principais variáveis de decisão, e outro grupo em que a rota não é associada diretamente ao veículo, usando variáveis binárias x_{ij} como principais variáveis de decisão. Com essas formulações, resolvemos alguns exemplos e obtemos resultados computacionais, com recurso ao software Xpress. Esses resultados permitiram tirar algumas conclusões sobre as formulações, incluindo comparação em termos da eficiência.

Os resultados obtidos mostram que as formulações com variáveis binárias x_{ij} são mais eficientes que as formulações com variáveis binárias x_{ijk} . No entanto, apenas as formulações com variáveis binária x_{ijk} permitem resolver problemas com veículos de ca-

pacidades diferentes. O tempo computacional para resolver uma instância de PRV ou PRVJT está relacionado com o número de clientes, para além do tipo de formulação e da flexibilidade das janelas temporais para o caso do PRVJT. Quanto maior é o número de cliente maior é o tempo computacional exigido para resolver um problema. O aumento de flexibilidade nas janelas temporais contribui para aumentar o tempo computacional e, em muitos casos, diminuir o valor da solução.

A relaxação linear de cada instância do PRV tal como da sua extensão, PRVJT, foi obtido em tempo computacional bastante reduzido e o seu valor depende da formulação escolhida. Nas instâncias do PRV, os melhores valores da relaxação linear foram obtidos quando usamos restrições de fluxos para eliminação de sub-rotas. Tanto nas instâncias do PRV como nas do PRVJT, os melhores valores da relaxação linear foram obtidos usando formulações com variáveis binárias x_{ij} em vez das formulações com variáveis binárias x_{ijk} .

Apêndice A

Modelo Xpress

Neste apêndice apresentamos dois modelos em código Mosel do Xpress. O primeiro modelo permite resolver uma instância do PRV com um depósito, um conjunto K de veículos com capacidades diferentes e um conjunto N de clientes $i \in N$, cada um com a sua procura q_i . O segundo modelo permite resolver uma instância do PRVJT onde, para além dos dados considerados no PRV, acrescentamos uma janela temporal e um tempo de serviço a cada cliente. Neste caso os veículos são idênticos, cada um com capacidade Q .

A.1 Código Mosel em Xpress para PRV, usando a formulação MTZ1

O código de Mosel para o PRV é o seguinte.

```
model PVR
uses "mmsystem", "mmxprs", "mmive"
```

```
parameters
clientes=7
veiculos=3
deposito=0
end-parameters
```

```
declarations
V=deposito..clientes
N=deposito+1..clientes
```

```

K=1..veiculos
Custo:array(V,V) of real
x:dynamic array(V,V,K) of mpvar
u:array(N,K) of mpvar
q:array(V)of real
Q:array (K) of real
status:array({XPRS_OPT,XPRS_UNF,XPRS_INF,XPRS_UNB,XPRS_OTH}) of string
end-declarations

!predizer resultados:
status: : ([XPRS_OPT,XPRS_UNF,XPRS_INF,XPRS_UNB,XPRS_OTH]) [
"Optimum found","Unfinished","Infeasible","Unbounded","Failed"]

!Leitura dos dados -----
initializations from "Custo-pedido-cap-7.txt"
Custo q Q
end-initializations

!Criação de arcos~~~~~
forall(k in K, i,j in V|i<>j) create (x(i,j,k))
!Função objetivo-----
F:=sum(i,j in V|j<>i,k in K) Custo(i,j)*x(i,j,k)
!-----RESTRIÇÕES-----
!Chegada nos clientes
forall(j in N) do
sum(i in V|i<>j,k in K) x(i,j,k)=1
end-do
!Saída do depósito
forall(k in K)
sum(j in V|j<>0) x(deposito,j,k)<=1

!Conservação de fluxo
forall(j in V,k in K)
sum(i in V|i<>j)x(i,j,k)=sum(i in V|i<>j)x(j,i,k)

```

```

!Restrições de capacidade e eliminação de sub-rotas
forall(i,j in N,k in K|i<>j)
u(i,k)-u(j,k)+Q(k)*x(i,j,k)<=Q(k)-q(j)

forall(i in N,k in K) do
q(i)<=u(i,k)
u(i,k)<=Q(k)
end-do      !restrições nas variáveis adicionais

!Restrições nas variáveis (de decisão) principais
forall(i in V,j in V,k in K) x(i,j,k) is_binary
!-----fim das RESTRIÇÕES-----

!Limitação do tempo de execução
setparam("XPRS_maxtime",-3600)

!Relaxação linaer
starttime:=gettime
minimize(XPRS_LIN,F)
endtime:=gettime
lp_objval:=getobjval
lp_time:=endtime-starttime

!Resolução (solução admissível)
starttime:=gettime
minimize(F)
endtime:=gettime
int_objval:=getobjval
int_time:=endtime-starttime

!contagem de número de rotas
Rotas:=sum(i in N, k in K)getsol(x(deposito,i,k))

!Escrever a solução num ficheiro com nome "resultados7" e extensão txt:
fopen("resultados7.txt",F_OUTPUT)

```

```

writeln("Número de rotas = ", getsol(Rotas))
writeln("Custo total: ", getobjval)
forall(i in N, k in K)
if(getsol(x(deposito,i,k))>0) then
    ct:=q(i)
    writeln("Rota percorrida pelo Veículo ",k)
    writeln(deposito, " -> ", i)
    R:=i
while(R<>deposito) do
    n:= integer(round(sum(j in V) j*getsol(x(R,j,k))))
    writeln(R, " -> ", n)
    ct+=q(n)
    R:=n
end-do
    writeln("Quantidade entregue pelo Veículo: ", ct)
end-if
    writeln;
writeln("RES: ", lp_objval," ", lp_time,
" ",int_objval," ",int_time," ",status(getprobat))
fclose(F_OUTPUT)
end-model

```

Obs.:se pretendemos ver o resultado no ecrã basta introduzir o ponto de exclamação, !, antes do comando fopen("resultados7.txt",F_OUTPUT).

Neste modelo introduzimos os dados de uma instância de PRV com 7 clientes, três veículos com capacidades diferentes e um depósito representado pelo número 0. Num ficheiro de bloco de notas, com nome "Custo-pedido-cap-7.txt", introduzimos uma matriz de custos entre as localidades, um vetor q com as procuras dos clientes e um outro vetor Q com as capacidades dos veículos, conforme indicamos a seguir.

Custo:

```

[0,      3122,686,852,210,1476,929,1584,
3122,0,    2646,2337,3063,1646,3270,3925,
686,2646,0,    974,817,900,724,1379,
852,2337,974,0,    672,1117,1344,1999,

```



```

210,3063,817,672,0,    1417,1078,1733,
1476,1646,900,1117,1417,0,    1344,1999,
929,3270,724,1344,1078,1344,0,    655,
1584,3925,1379,1999,1733,1999,655,0]

```

```
q: [0, 85,150,200,80,150,200,200]
```

```
Q: [400, 500, 350]
```

A.2 Código Mosel em Xpress para PRVJT, usando a formulação PRVJT4

O código Mosel para o PRVJT é o seguinte.

```

model PVRJT
uses "mmsystem","mmxprs", "mmive"

parameters
clientes=25
Deposito=1
Q=50
end-parameters

declarations
V=Deposito..clientes+1
N=Deposito+1..clientes+1
X0:array(V) of real
Y0:array(V) of real
q:array(V)of real
a:array(V) of real
b:array(V) of real
s:array(V) of real
x:array(V,V) of mpvar
y:array(N) of mpvar
p:array(N) of mpvar
status:array({XPRS_OPT,XPRS_UNF,XPRS_INF,XPRS_UNB,XPRS_OTH}) of string
end-declarations

```

```

status: : ([XPRS_OPT, XPRS_UNF, XPRS_INF, XPRS_UNB, XPRS_OTH]) [
"Optimum found", "Unfinished", "Infeasible", "Unbounded", "Failed"]

!Leitura de dados ~~~~~~
fopen("R101.25.50.txt", F_INPUT)
forall (i in V)
readln(i, X0(i), Y0(i), q(i), a(i), b(i), s(i))
fclose(F_INPUT)

!Cálculo e arredondamento de distância entre as localidades~~~~~
forall(i, j in V)
DIST(i, j) := round(((X0(j) - X0(i))^2 + (Y0(j) - Y0(i))^2)^0.5)

!Tempo de viagem entre as localidades~~~~~
forall(i, j in V)
t(i, j) := DIST(i, j) * 0.1

!Função objetivo~~~~~
F := sum(i, j in V) DIST(i, j) * x(i, j)

!---RESTRIÇÕES~~~~~
forall(i in N)
sum(j in V) x(j, i) = 1

forall(i in N)
sum(j in V) x(i, j) = sum(j in V) x(j, i)

M := 10000
forall(i, j in N) do
    p(j) >= p(i) + t(i, j) + s(j) - M * (1 - x(i, j))
a(i) + s(i) <= p(i)
p(i) <= b(i)

y(i) + q(i) - y(j) <= Q * (1 - x(i, j))
0 <= y(i)

```

```

y(i)<=Q
end-do

forall(i,j in V) x(i,j) is_binary

!fim de RESTRIÇÕES~~~~~

setparam("XPRS_maxtime",-1800)!limitação do tempo de execução

!Relaxação linear ~~~~~
starttime:=getttime
minimize(XPRS_LIN,F)
endtime:=getttime
lp_objval:=getobjval
lp_time:=endtime-starttime

!Resolução (melhor solução admissível)~~~~~
starttime:=getttime
minimize(F)
endtime:=getttime
int_time:=endtime-starttime
int_objval:=getobjval

!contagem de número de rotas
Rotas:=sum(i in N)x(Deposito,i)

!Escrever a solução num ficheiro com nome "Resultados.txt"~~~~~
fopen('Resultados.txt',F_OUTPUT)
writeln("Custo total: ", getobjval)
writeln('Número de rotas = ',getsol(Rotas))
writeln("Distribuição das rotas:")
forall(i in N)
if(getsol(x(Deposito,i))>0) then
    ct:=q(i)
    writeln(Deposito, " -> ", i)
    R:=i

```

```

while(R<>Deposito) do
  n:= integer(round(sum(j in V) j*getsol(x(R,j))))
  writeln(R, " -> ", n)
  ct+=q(n)
  R:=n
end-do

  writeln("Quantidade entregue pela rota: ", ct,";")
end-if
writeln;

!valores computacionais-----
writeln("(val.RL",", ", "temp.RL",",", ", "val.SA",",", ", "temp.SA",
", ", "situação) =")
writeln("(,lp_objval,",", ", lp_time,",", ",int_objval,",", ",
int_time,",", ",status(getprobat),")")

fclose(F_OUTPUT)

end-model

```

Obs.: se pretendemos ver o resultado no ecrã, basta introduzir o ponto de exclamação antes do comando fopen, quando mandamos escrever a solução.

Para este modelo consideramos uma instância, construída a partir da instância R101 de base de dados. A instância construída tem um depósito representado pelo número 1, 25 clientes representados pelos números 2 ... 26 e um conjunto ilimitado de veículos, cada um com capacidade 50. Os dados, indicados abaixo estão num ficheiro de bloco de notas com nome "R101.25.50.txt". Na primeira coluna estão os números correspondentes às localidades onde estão situados o depósito e os clientes. A segunda e terceira colunas indicam as coordenadas geográficas das localidades. A quarta coluna apresenta as procuras dos clientes. A quinta e a sexta colunas indicam, respetivamente, os limites inferiores e os limites superiores das janelas temporais associadas aos clientes. A última coluna indica o tempo de serviço associado a cada cliente. Consideramos o tempo de viagem de i para j , $t_{ij} = 0.1 * d_{ij}$, sendo d_{ij} a distância de i para j .

1	35.00	35.00	0.00	0.00	230.00	0.00
2	41.00	49.00	10.00	161.00	171.00	10.00
3	35.00	17.00	7.00	50.00	60.00	10.00
4	55.00	45.00	13.00	116.00	126.00	10.00
5	55.00	20.00	19.00	149.00	159.00	10.00
6	15.00	30.00	26.00	34.00	44.00	10.00
7	25.00	30.00	3.00	99.00	109.00	10.00
8	20.00	50.00	5.00	81.00	91.00	10.00
9	10.00	43.00	9.00	95.00	105.00	10.00
10	55.00	60.00	16.00	97.00	107.00	10.00
11	30.00	60.00	16.00	124.00	134.00	10.00
12	20.00	65.00	12.00	67.00	77.00	10.00
13	50.00	35.00	19.00	63.00	73.00	10.00
14	30.00	25.00	23.00	159.00	169.00	10.00
15	15.00	10.00	20.00	32.00	42.00	10.00
16	30.00	5.00	8.00	61.00	71.00	10.00
17	10.00	20.00	19.00	75.00	85.00	10.00
18	5.00	30.00	2.00	157.00	167.00	10.00
19	20.00	40.00	12.00	87.00	97.00	10.00
20	15.00	60.00	17.00	76.00	86.00	10.00
21	45.00	65.00	9.00	126.00	136.00	10.00
22	45.00	20.00	11.00	62.00	72.00	10.00
23	45.00	10.00	18.00	97.00	107.00	10.00
24	55.00	5.00	29.00	68.00	78.00	10.00
25	65.00	35.00	3.00	153.00	163.00	10.00
26	65.00	20.00	6.00	172.00	182.00	10.00

Apêndice B

Outros resultados computacionais

Neste apêndice mostramos os resultados obtidos com algumas instâncias da base de dados de VRPTW, quando nas formulações não exigimos que o veículo permaneça no local do cliente durante o tempo de serviço e em que consideramos o tempo de viagem de uma localidade i para outra localidade j como ao produto da respectiva distância pelo valor 0.01, isto é, usamos $t_{ij} = 0.01 * d_{ij}$.

PRVJT2* é uma formulação obtida da formulação **PRVJT2** substituindo as restrições (3.8) por $a_i \leq z_{ik} \leq b_i, \forall i \in N, \forall k \in K$. **PRVJT4*** é uma formulação obtida da formulação **PRVJT4** substituindo as restrições (3.17) por $a_i \leq p_i \leq b_i, \forall i \in N$. **PRVJT4**** é uma formulação obtida de **PRVJT4** substituindo as restrições (3.17) por $a_i \leq p_i \leq b_i, \forall i \in N$, e as restrições (3.21) pelas restrições $p_j \geq p_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}), \forall i, j \in N | i \neq j$, isto é, quando não é considerado o tempo de serviço. Nas Tabelas B.1 a B.6 os números a negrito correspondem a valores ótimos confirmados.

Podemos observar que com o uso da formulação **PRVJT4****, foram obtidas soluções com valores, geralmente, menores que os valores obtidos, usando a formulação **PRVJT4*** (ver Tabelas B.1 a B.6). As formulações precedidas de um asterisco fornecem soluções com valores menores que os valores obtidos com o uso das formulações sem asteriscos, apresentadas no corpo do trabalho, (ver Tabelas 3.6 a 3.8 e Tabelas B.1 a B.6). Este fato deve-se à flexibilidade do tempo de serviço nos clientes. Apenas nas formulações sem asteriscos é considerado o tempo de serviço de modo que os veículos permaneçam nos clientes durante o tempo de serviço. Esta é a formulação, de entre as apresentadas, que mais se aplica à situação da vida real. A formulação com dois asteriscos, **PRVJT4****, é aquela que menos se aplica à situação da vida real, porque não leva em conta o tempo de serviço nos clientes. Com esta formulação as rotas são

formadas tendo em conta apenas a sequência de visita, desde que os clientes sejam visitados nos intervalos correspondentes às janelas temporais predefinidas. Nas formulações precedidas de um asterisco, **PRVJT2*** ou **PRVJT4***, o tempo de serviço só é considerado para iniciar o serviço nos clientes, para o caso de **PRVJT2***, ou para terminar o serviço nos clientes, para o caso de **PRVJT4***. Quando usamos as formulações precedidos de * ou **, a hora de chegada num cliente pode coincidir com a hora de partida. Assim o veículo pode não ter tempo para servir o cliente. Podemos verificar que o aumento de rigidez no tempo de serviço pode aumentar o valor da solução.

Tabela B.1: Resultados computacionais das instâncias de Solomon ("grupo R"), sem que o veículo permaneça no local do cliente durante o tempo de serviço.

Formulação PRVJT4*						Formulação PRVJT2*			
Prob.	n	Relaxação Linear		Solução Admissível		Relaxação Linear		Solução Admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo	Valor	Tempo	Valor	Tempo
R101	25	278,815	0,015	616	0,016	276	0,259	616	115,497
	50	408,095	0,109	1031	0,094	403	4,497		1799,92
	75	524,3	0,406	1399	0,218	519	13,434		1799,47
	100	576,597	0,593	1601	0,686	571	32,37		1799,65
R102	25	278,815	0,016	547	8,72	276	0,348	575	1799,73
	50	408,095	0,109	909	1799,58	403	3,338		1799,44
	75	524,3	0,406	1256	1799,9	519	13,479		1799,66
	100	576,597	0,795	1474	1799,53	571	33,978		1799,97
R104	25	278,815	0,109	417	1799,17	276	0,287	575	1799,92
	50	408,095	0,109	699	1799,18	403	3,775		1799,63
	75	524,3	0,327	915	1799,98	519	10,889		1799,72
	100	576,597	0,687	1281	1799,6	571	21,472		1799,99
R112	25	278,815	0,016	402	1799,32	276	0,247		1799,94
	50	408,095	0,109	821	1799,2	403	4,54		1799,29
	75	524,3	0,359	1027	1799,95	519	17,644		1799,15
	100	574,503	0,687	1280	1799,59	569	35,829		1799,47
R201	25	276,713	0,015	462	0,141	276	0,326	465	1799,19
	50	404,361	0,39	791	2,886	403	5,164		1799,16
	75	520,683	0,374	994	123,256	519	16,536		1799,6
	100	572,597	0,765	1133	465,083	571	35,642		1805,38
R202	25	276,563	0,016	410	17,581	276	0,246	418	1799,45
	50	404,316	0,203	715	1799,43	403	3,619		1799,65
	75	520,451	0,374	972	1799,85	519	14,672		1799,07
	100	572,477	0,749	1197	1799,56	571	34,778		1799,91
R204	25	276,563	0,032	355	1799,01	276	0,367	406	1799,84
	50	404,019	0,094	600	1799,15	403	3,494		1799,8
	75	520,063	0,343	806	1799,93	519	14,736		1799,95
	100	572,123	0,748	1128	1799,51	571	25,069		1799,11
R211	25	276,563	0,109	350	1799,17	276	0,43	393	1799,77
	50	404,019	0,14	649	1799,17	403	3,931		1799,48
	75	520,06	0,343	1000	1799,93	519	17,971		1799,79
	100	572,119	0,811	1185	1799,49	571	39,203		1799,48

Tabela B.2: Resultados computacionais das instâncias de Solomon ("grupo C"), sem que o veículo permaneça no local do cliente durante o tempo de serviço.

Formulação PRVJT4*						Formulação PRVJT2*			
Prob.	n	Relaxação Linear		Solução Admissível		Relaxação Linear		Solução Admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo	Valor	Tempo	Valor	Tempo
C101	25	70,7	0,017	192	0,022	69	0,267	192	13,586
	50	147,4	0,079	365	0,138	145	4,789	436	1800,2
	75	227,475	0,305	650	0,446	224	11,498		1799,8
	100	314,675	0,425	829	1,779	309	23,15		1799,72
C102	25	70,7	0,064	191	23,003	69	0,229	191	1799,98
	50	147,4	0,087	364	112,628	145	4,088		1799,25
	75	227,475	0,207	651	1799,5	224	10,468		1799,4
	100	314,675	0,443	834	1800	309	22,854		1799,22
C104	25	70,7	0,016	188	1799,5	69	0,314	188	1799,92
	50	147,4	0,071	431	1799,34	145	3,744		1799,59
	75	227,475	0,234	927	1799,98	224	6,864		1799,12
	100	314,675	0,609	1279	1799,85	309	13,744		1799,17
C109	25	70,7	0,027	192	270,106	69	0,253	193	1799,69
	50	147,4	0,087	388	1799,4	145	1,769		1799,43
	75	227,475	0,279	840	1799,28	224	8,096		1799,23
	100	314,675	0,86	1252	1799,17	309	17,254		1799,35
C201	25	142,6	0,045	217	0,025	142	0,412	217	50,84
	50	257,629	0,084	361	0,34	257	6,115	504	1800,9
	75	335,157	0,257	510	0,5	334	29,624		1800,01
	100	472,602	0,546	590	0,669	471	64,943		1799,46
C204	25	142,6	0,021	217	1799,63	142	0,195	253	1799,61
	50	257,629	0,104	402	1799,02	257	3,806	632	1799,43
	75	335,157	0,206	704	1799,2	334	10,062		1799,63
	100	472,6	0,528	897	1799,86	471	21,325		1799,91
C208	25	142,6	0,016	217	8,548	142	0,252	255	1799,99
	50	257,629	0,078	352	24,96	257	4,992	692	1799,96
	75	335,157	0,203	535	1799,65	334	14,055		1800,03
	100	472,6	0,405	662	1799,01	471	28,626		1799,18

Tabela B.3: Resultados computacionais das instâncias de Solomon ("grupo RC"), sem que o veículo permaneça no local do cliente durante o tempo de serviço.

Formulação PRVJT4*						Formulação PRVJT2*			
Prob.	n	Relaxação Linear		Solução Admissível		Relaxação Linear		Solução Admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo	Valor	Tempo	Valor	Tempo
RC101	25	93,4	0,037	461	2,004	92	0,228	461	1799,77
	50	183,3	0,098	942	971,82	180	1,534		1799,85
	75	408,227	0,28	1362	1799,31	399	11.295		1800,57
	100	533,45	0,811	1671	1799,49	524	38.033		1811,38
RC102	25	93,4	0,125	344	33,306	92	0,219	350	1799,07
	50	183,3	0,156	804	1799,28	180	1,663		1799,73
	75	408,228	0,328	1342	1799,98	399	9.844		1799,37
	100	533,45	0,889	1814	1799,43	524	32.339		1799,51
RC104	25	93,4	0,015	305	1799,29	92	0,195	305	1799,7
	50	183,3	0,109	586	1799,98	180	1,663		1799,73
	75	408,228	0,327	1289	1799,14	399	8.487		1800,21
	100	533,45	0,796	1712	1799,51	524	23,79		1799,7
RC108	25	93,4	0,016	296	1799,24	92	0,424	294	1799,9
	50	183,3	0,156	788	1799,07	180	1,667		1799,47
	75	408,228	0,312	1330	1799,99	399	10.983		1800,18
	100	533,45	0,811	1643	1799,51	524	40.093		1799,52
RC201	25	92,28	0,063	358	0,437	92	0,247	362	1799,75
	50	180,706	0,094	682	5,959	180	1,765		1799,36
	75	401,352	0,39	1060	767,271	399	11.793		1799,43
	100	526,002	0,655	1285	1799,06	524	39.655		1799,68
RC202	25	92,28	0,016	358	0,358	92	0,293	362	1799,84
	50	180,706	0,094	682	5,647	180	1,638		1799,48
	75	401,352	0,312	1060	766,726	399	11.934		1799,07
	100	526,002	0,671	1285	1799,35	524	41.247		1799,79
RC204	25	92,28	0,016	315	1799,32	92	0,271	333	1799,75
	50	180,66	0,093	535	1799,13	180	1,381	829	1800,36
	75	400,846	0,296	1055	1799,03	399	9.298		1799,96
	100	525,89	0,624	1683	1799,82	524	24.679		1799,98
RC208	25	92,28	0,109	288	1799,17	92	0,488	307	1799,62
	50	180,66	0,109	586	1799,12	180	1,606		1800,35
	75	400,846	0,281	1108	1799,03	399	10.889		1799,18
	100	525,89	0,733	1472	1799,56	524	38.719		1799,17

Tabela B.4: Resultados computacionais do grupo R, sem tempo de serviço.

Formulação PRVJT4**					
Prob.	n	Relaxação Linear		Solução admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo
R101	25	276,012	0,016	580	0,047
	50	403,024	0,047	935	0,281
	75	519,037	0,124	1190	0,531
	100	571,031	0,218	1356	1,763
R102	25	276,007	0,016	503	11,294
	50	403,02	0,062	779	1799,36
	75	519,027	0,125	1066	1799,3
	100	571,027	0,234	1311	1799,25
R104	25	276,006	0,015	382	1799,37
	50	403,01	0,047	608	1799,31
	75	519,011	0,14	771	1799,15
	100				
R112	25	276,006	0,034	348	1799,59
	50	403,01	0,047	619	1799,39
	75	519,011	0,14	877	1799,28
	100	569,011	0,309	1127	1799,04
R201	25	276,041	0	462	0,141
	50	403,083	0,047	778	7,114
	75	519,144	0,109	969	210,507
	100	571,126	0,187	1090	1799,87
R202	25	276,02	0,062	406	27,846
	50	403,064	0,062	698	1799,16
	75	519,107	0,109	909	1799,29
	100	571,106	0,218	1124	1799,17
R204	25	276,006	0,015	357	1799,43
	50	403,01	0,078	548	1799,34
	75	519,014	0,141	758	1799,24
	100	571,015	0,249	883	1799,26
R211	25	276,006	0,015	335	1066,64
	50	403,01	0,094	543	1799,71
	75	519,011	0,187	676	1799,64
	100	571,011	0,266	884	1799,79

Tabela B.5: Resultados computacionais do grupo C, sem tempo de serviço.

Formulação PRVJT4**					
Prob.	n	Relaxação Linear		Solução admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo
C101	25	69,022	0,015	192	0,032
	50	145,009	0,032	364	1,076
	75	224,022	0,094	649	2,215
	100	309,047	0,172	826	1,919
C102	25	69,0055	0	191	753,496
	50	145,007	0,047	375	1799,76
	75	224,021	0,188	649	1799,14
	100	309,026	0,187	885	1799,98
C104	25	69,0049	0,016	184	1799,95
	50	145,006	0,078	374	1799,15
	75	224,009	0,093	656	1799,99
	100	309,013	0,28	842	1799,95
C109	25	69,0104	0	190	1799,98
	50	145,005	0,031	403	1799,14
	75	224,011	0,156	754	1799,93
	100	309,021	0,171	910	1799,96
C201	25	142,052	0,02	217	0,22
	50	257,041	0,038	361	0,695
	75	334,021	0,107	510	2,564
	100	471,055	0,196	588	1,953
C204	25	142,011	0,011	206	1799,56
	50	257,004	0,04	366	1799,45
	75	334,008	0,097	558	1799,34
	100	471,011	0,203	734	1799,2
C208	25	142,01	0,011	217	214,569
	50	257,012	0,041	352	886,92
	75	334,008	0,101	586	1799,92
	100	471,019	0,18	646	1799,25

Tabela B.6: Resultados computacionais do grupo RC, sem tempo de serviço.

Formulação PRVJT4**					
Prob.	n	Relaxação Linear		Solução admissível	
		Valor	Tempo	Valor	Tempo
RC101	25	92,0028	0,009	356	0,826
	50	180,008	0,037	661	48,396
	75	399,035	0,096	1097	1799,9
	100	524,023	0,206	1346	1799,24
RC102	25	92,0028	0,072	334	1799,57
	50	180,008	0,046	609	1799,42
	75	399,03	0,105	1067	1799,25
	100				
RC104	25	92,0028	0,009	299	1799,15
	50	180,007	0,055	536	1799,09
	75	399,019	0,1	923	1799,08
	100				
RC108	25	92,0028	0,013	296	1799,26
	50	180,007	0,064	546	1799,07
	75	399,019	0,131	975	1799,17
	100				
RC201	25	92,0089	0,01	356	0,519
	50	180,04	0,038	666	6,324
	75	399,187	0,121	1039	1799,71
	100	524,117	0,223	1249	1799,01
RC202	25	92,0089	0,009	356	0,814
	50	180,04	0,097	666	6,214
	75	399,187	0,203	1039	1799,84
	100	524,117	0,245	1249	1799,03
RC204	25	92,0073	0,009	299	1799,28
	50	180,01	0,04	458	1799,11
	75	399,026	0,097	721	1799,17
	100	524,023	0,377	1219	1799,93
RC208	25	92,0028	0,009	229	1799,26
	50	180,007	0,088	473	1799,03
	75	399,019	0,101	810	1799,17
	100	524,019	0,203	1053	1799,09

Bibliografia

- [1] S. R. Balseiro, I. Loiseau, and J. Ramonet. An ant colony algorithm hybridized with insertion heuristics for the time dependent vehicle routing problem with time windows. *Computers and Operations Research*, 38:954–966, 2011.
- [2] L. D. Bodin and B. Golden. Classification in vehicle routing and scheduling. *Networks*, 11(2):97–108, 1981.
- [3] H. I. Calvete, C. Gale, M. J. Oliveros, and B. S. Valverde. A goal programming approach to vehicle routing problems with soft time windows. *European Journal of Operational Research*, 177:1720–1733, 2007.
- [4] J. F. Cordeau, G. Desaulniers, J. Desrosiers, M. M. Solomon, and F. Soumis. Vehicle routing problem with time windows. In Paolo Toth and Daniele Vigo, editors, *The Vehicle Routing Problem*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, chapter 7, pages 155–193. SIAM, 2002.
- [5] J. F. Cordeau, G. Laport, M. W. P. Savelsbergh, and D. Vigo. *Vehicle Routing*, volume 14, chapter 6, pages 367–428. Handbooks in Operations Research and Management Science, 2007.
- [6] G. B. Dantzig and J. H. Ramser. The truck dispatching problem. *Management Science*, 6(1):80–91, 1959.
- [7] J. M. Daza, J. R. Montoya, and F. Narducci. Resolución del problema de enrutamiento de vehículos con limitaciones de capacidad utilizando un procedimiento metaheurístico de dos fases. *Revista EIA, ISSN 1794-1237*, 12:23–38, 2009.
- [8] M. Desrochers, J. K. Lenstra, M. W. P. Savelsbergh, and F. Soumis. Vehicle routing with time windows: Otimization and approximation. *Elsevier Science Publishers B. V.*, 16:65–83, 1988.

- [9] M. C. Goldbarg and H. P. L. Luna. *Otimização combinatória e programação linear: Modelos e algoritmos*. Editora Campus, Rio de Janeiro, 2^a edition, 2005.
- [10] A. F. M. Guerreiro. *Construção de uma meta-heurística de otimização de rotas de veículos*. Tese de mestrado, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, 2009.
- [11] T. L. Magnanti. Combinatorial optimization and vehicle fleet planning: Perspectives and prospects. *Networks*, 11(2):179–213, 1981.
- [12] C. E. Miller, A. W. Tucker, and R. A. Zemlin. Integer programming formulations and traveling salesman problems. *Journal of the ACM*, 7:326–329, 1960.
- [13] S. Ribas, A. Subramanian, I. M. Coelho, L. S. Ochi, and M. Souza. Um algoritmo híbrido para resolução do problema de roteamento de veículos com janelas de tempo. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, XXIX:9471–9484, Noviembre 2010.
- [14] M. J. F. Souza. Otimização combinatória, notas de aula. *Departamento de Computação da Universidade Federal de Ouro Preto*, 2009.
- [15] J. Tang, Z. Pan, R. Y. K. Fung, and H. Lau. Vehicle routing problem with fuzzy time windows. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:683–695, 2009.
- [16] P. Toth and D. Vigo. An overview of vehicle routing problems. In Paolo Toth and Daniele Vigo, editors, *The Vehicle Routing Problem*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, chapter 1, pages 1–26. SIAM, 2002.